Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve écrite de mathématiques 2021

Nina Aguillon, Jérémie Bettinelli, Clémentine Courtès, Cyril Marzouk

Durée : 4 heures **calculatrice interdite**

1 Commentaires généraux

Notation. Nous utilisons dans la mesure du possible la notation figurant au programme officiel ; ainsi les ensembles de nombres sont notés **N**, **R**, etc., les probabilités et espérances respectivement P et E. Les candidat·es utilisant sur leur copie des notations usuelles différentes ne sont en aucun cas pénalisé·es. Nous rappelons que les lettres grecques sont couramment utilisées en mathématique et invitons les candidat·es à en connaitre leur graphie, que nous rappelons ici.

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \epsilon \quad \varepsilon \quad \zeta \quad \eta \quad \theta \quad \vartheta \quad \iota \quad \kappa \quad \lambda \quad \mu \quad \nu \quad \xi \quad o \quad \pi \quad \varpi \quad \rho \quad \varrho \quad \sigma \quad \varsigma \quad \tau \quad \upsilon \quad \phi \quad \varphi \quad \chi \quad \psi \quad \omega$$

$$\Gamma \quad \Delta \quad \Theta \quad \Lambda \quad \Xi \quad \Pi \quad \Sigma \quad \Upsilon \quad \Phi \quad \Psi \quad \Omega$$

Nous ne pénalisons pas les graphies plus ou moins approximatives et invitons les candidat·es à ne pas se formaliser si d'aventure un symbole n'est pas reconnu, et à simplement essayer de le reproduire sur leur copie au besoin.

Structure du sujet. Le sujet était composé de trois problèmes indépendants permettant d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme. Nous avons porté une attention particulière à proposer aux candidat·es des questions abordables dans chaque partie, mais également à poser régulièrement des questions plus délicates pour permettre aux meilleur·es candidat·es de se distinguer.

Le sujet était calibré de sorte à ce que les bon·nes candidat·es aient le temps d'aborder la quasi-totalité des questions et que les meilleur·es puissent s'attarder sur les questions délicates, généralement placées en fin de problèmes.

Bilan général. Le sujet a permis de bien classer les candidat·es, y compris pour les faibles notes. La présence de nombreuses questions simples permet aux candidat·es, même de niveau faible, de traiter une partie du sujet et d'obtenir quelques points. Nous leur conseillons donc de ne pas se censurer et de traiter ce qui est à leur portée. Nous demeurons très satisfaits du niveau des meilleur·es candidat·es qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi leur maitrise de toutes les parties du programme.

2 Système de notation

Notes brutes et difficulté du sujet. Chaque question du sujet a été notée par un nombre entier allant de 0 à 4, puis pondérée par un facteur allant de 0.5 à 2. La note brute correspond alors au quart de la somme pondérée ; la note brute maximale ainsi possible était de 61.5 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 58.6 points. Les notes sont ramenées ultérieurement sur 20 par une transformation donnée plus bas.

Le bonus/malus introduit l'année dernière a été reconduit cette année pour récompenser les rédactions propres, honnêtes et rigoureuses et pour pénaliser les rédactions brouillons, malhonnêtes, imprécises.

On obtient ainsi la distribution suivante des notes brutes, avec une moyenne de 18.2 et une médiane de 15.8.

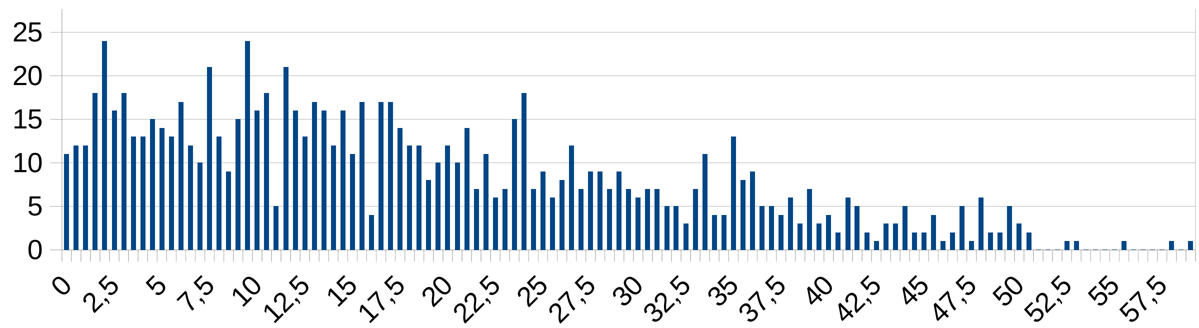

FIGURE 1 – Distribution des notes brutes.

Nous avons par ailleurs estimé pour chaque question son niveau de difficulté : de 1 pour les questions de cours ou de calculs numériques élémentaires jusqu'à 4 pour les raisonnements plus fins et les questions difficiles.

Nous indiquons dans le tableau suivant pour chaque question le coefficient appliqué, le niveau de difficulté que l'on a estimé, la moyenne sur 4 obtenue par les candidat·es ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant obtenu au moins la moitié des points et le pourcentage de copies ayant obtenu au moins trois quart des points.

question	1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	4d	5
coefficient	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0	0,5	1,0	1,5	1,5	2,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0
difficulté	1	1	2	1	3	1	3	2	2	4	2	3	2	4	3
moyenne	3,6	3,2	2,1	3,3	2,4	3,5	2,5	3,1	2,7	1,4	1,7	2,6	2,4	1,8	1,8
≥ 0/4 (en %)	93	90	81	83	63	69	80	65	62	17	28	19	22	24	11
≥ 2/4 (en %)	86	72	42	67	38	60	55	51	49	5	12	14	15	9	4
≥ 3/4 (en %)	79	71	41	67	30	59	34	48	46	3	9	11	9	8	4

question	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	7d	7e	8a	8b	8c	8d	8e
coefficient	2,0	2,0	0,5	1,5	1,0	0,5	2,0	2,0	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	2,0
difficulté	2	1	1	2	2	1	3	2	3	2	1	3	4	4
moyenne	2,7	2,1	3,0	1,8	2,4	2,6	1,2	1,9	1,8	2,3	2,4	1,6	2,3	0,3
≥ 0/4 (en %)	90	82	83	79	82	68	63	37	39	59	81	49	14	16
≥ 2/4 (en %)	69	40	63	46	41	43	18	17	18	39	59	24	9	1
≥ 3/4 (en %)	53	36	59	23	39	42	13	16	14	26	41	13	8	0

FIGURE 2 – Statistiques brutes question par question pour les problèmes A et B.

Notons que les premières questions, pourtant très basiques, ont été fortement valorisées afin de distinguer les candidat·es ayant fourni un investissement en mathématiques. Ainsi, la parfaite résolution des questions de difficulté 1 permettait d'obtenir la note brute de 15, celle des questions de difficulté 1 ou 2 la note brute de 38. Après transformation, ces notes correspondent respectivement aux notes finales de 9 et 16.

question	9a	9b	9c	9d	10a	10b	11a	11b	11c	11d	12a	12b	12c	13	14a	14b	14c	15a	15b	16a	16b	16c	16d	17a	17b	17c
coefficient	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	0,5	0,5	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	2,0	1,5	1,5	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	0,5	1,0	0,5	0,5
difficulté	1	2	1	2	2	3	1	1	3	1	2	2	1	1	1	2	3	2	3	4	3	2	4	1	2	3
moyenne	3,6	2,8	3,4	2,3	2,9	1,9	3,1	2,9	1,5	3,0	2,3	2,8	2,6	1,9	1,2	2,6	1,5	2,5	1,5	2,0	2,5	2,5	1,1	2,5	1,9	2,0
≥ 0/4 (en %)	85	76	68	63	55	52	64	68	42	59	48	38	32	65	65	30	23	45	27	38	18	14	8	27	11	21
≥ 2/4 (en %)	75	55	58	36	42	27	49	49	18	44	29	28	21	32	24	20	7	27	10	23	10	11	2	15	7	12
≥ 3/4 (en %)	75	50	57	33	38	16	49	47	11	44	26	23	19	28	8	17	6	23	8	14	10	8	1	14	3	8

FIGURE 3 – Statistiques brutes question par question pour le problème C.

Notes finales sur 20. Traditionnellement, une transformation linéaire par morceaux des notes brutes permet de ramener les notes sur 20. Depuis quelques année, le jury vise à ce que cette transformation soit le plus proche possible d'une transformation linéaire (c'est-à-dire avec un seul morceau), en faisant en sorte que l'étalement des notes soit obtenu directement sur les notes brutes à l'aide d'un sujet le mieux calibré possible.

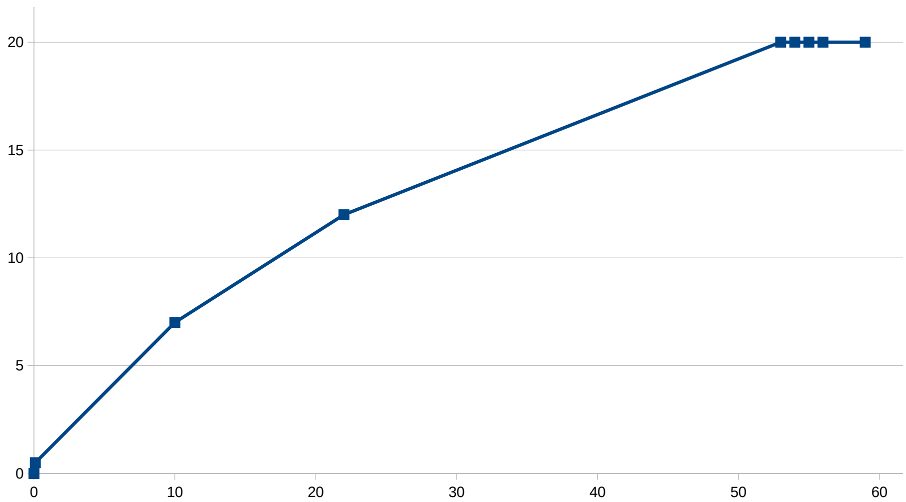

FIGURE 4 – Transformation linéaire par morceaux.

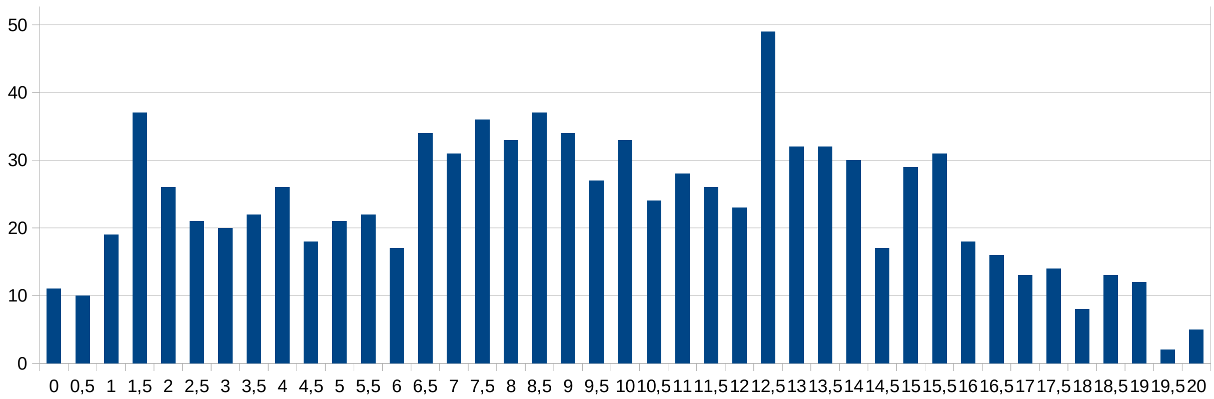

FIGURE 5 – Distribution des notes après transformation.

Cette transformation a pour effet d'étaler les copies ayant obtenues de faibles notes tout en conservant un écart satisfaisant entre les meilleures copies. Le décrochement au niveau de

0 permet de distinguer les copies ayant obtenu 0 en note brute des autres. Ainsi les 11 copies ayant obtenu la note finale de 0 sont exactement celles qui ont obtenu la note brute de 0.

Sur les notes finales, la moyenne est 9.36, la médiane est 9.50 et l'écart-type est 5.01.

3 Conseils aux candidat·es

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour donner aux futur·es candidat·es quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

Honnêteté. Il est très appréciable de voir les candidat·es aborder de nombreuses questions. Toutefois, nous rappelons qu'il est immédiat de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête ou de grappiller des points. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et pénalisent ensuite les candidat·es tout au long de la copie, toute ambigüité étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Les candidat·es sont également invité·es à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés sur leur copie. Par exemple, la question *(6d)* était un cas particulier de la question *(7e)*. Repérer une incohérence permet généralement de corriger une erreur. À défaut de réussir à la corriger, les candidat·es ont intérêt à la signaler. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Au contraire, toute tentative de bluff, réelle ou supposée, fera systématiquement perdre les points de la question et jettera le doute sur le reste de la copie. Par exemple, une erreur en *(10b)* ne permettait pas de mener au bout les calculs de la question *(11c)*. Les candidat·es qui, ayant obtenu un résultat faux, l'ont mentionné, n'ont pas perdu de points (et ont pu obtenir des points de raisonnement). Celles et ceux qui, au contraire, ont obtenu le résultat demandé en arnaquant par-ci par-là ont été sanctionné·es.

Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, ne tentez pas de dire que c'est évident. Cela irrite les correcteur·trices et sème le doute quant à votre sincérité. Mieux vaut une copie qui accepte et montre ses limites qu'une copie malhonnête.

Rédaction. L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est parfaitement inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne pas la rédaction. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments très courts. La rédaction des questions élémentaires, de plus en plus nombreuses et valorisées, joue un rôle important dans la notation, qui favorise largement les candidat·es répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à celles et ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement.

Ainsi, la multiplication des questions élémentaires doit inviter les candidat·es les plus modestes à accorder davantage de temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées des exercices. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambigüité* au jury que le candidat a trouvé une démonstration *complète*, *concise*, *sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée*.

— **Ambigüité ou démonstration incomplète.** Un·e candidat·e perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant la même ambigüité avec un argument totalement faux. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

Il est indispensable de mentionner tous les arguments dans la résolution d'une question de base. Par exemple, à la question *(9b)*, il fallait évoquer l'indépendance des variables aléatoires.

De plus, il faut toujours mentionner un résultat prouvé dans une question précédente **au moment où on l'utilise. Il n'est pas nécessaire d'indiquer qu'on admet une question qu'on n'arrive pas à démontrer.** Ce qui est nécessaire est d'indiquer clairement les résultats des questions précédentes que l'on utilise, peu importe si on a réussi ou non à les démontrer. Par exemple, en *(1d)*, on peut dire « D'après la question *(1c)*, on obtient que $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$ et donc [...] ».

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

— **Précision.** Insistons une fois de plus sur le fait qu'il faut répondre aux questions posées. Nous n'avons pas noté cette année d'erreur récurrente de ce type ; quelque fois, à la question *(2b)*, l'égalité $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ a été montrée, sans que soit fait le lien avec le membre de gauche de la question. Dans ce cas, tous les points ne pouvaient être obtenus.

— **Concision.** La plupart des questions de l'épreuve peuvent être résolues à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les candidat·es capables de mettre cet argument en évidence par rapport à celles et ceux qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Par exemple, en *(7b)*, il suffisait de dire « E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ donc $\dim(E) \leq \dim(\mathbf{R}^n) = n$ ». Mentionner en plus que E était généré par n^2 vecteurs n'était pas utile et laissait penser au jury que le·a candidat·e ne savait pas quel était le bon argument. Nous encourageons enfin les candidat·es à ne pas faire figurer plusieurs réponses à une question, notamment si l'une est fausse car elle pénalisera très fortement l'autre.

— **Arguments erronés.** Énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut que jeter la suspicion sur toute la copie.

— **Rédaction et sténographie.** Nous avons apprécié la disparition presque complète de signes cabalistiques ou notations non-standards ; nous encourageons vivement les futur·es candidat·es à poursuivre cet effort. Nous notons toutefois la présence de sigles tels que « sce » ou « sev », une copie remplies de « ĉ » ; enfin un abus du signe « $\iff$ », utilisé à tort et à travers, par exemple aux questions *(4b)* et *(4c)* où on a pu lire plusieurs fois « $y \in [-x, x] \iff y \in [-1, 1]$ ».

— **Orthographe, erreurs de calculs.** Même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter autant que possible d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières. Ainsi, trouver 0 ou bien une valeur négative en *(1b)* devrait vous alerter et permettre de corriger l'erreur (en *(1a)* ou *(1b)*). De même, une probabilité qui n'est clairement pas entre 0 et 1 indique une erreur (parmi d'autres, nous avons vu par exemple les valeurs $-e^{-\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_1 x}$, n). En plus d'aboutir à un résultat faux, des points supplémentaires ont généralement été retirés.

— **Présentation de la copie.** Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidat·es croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant. Nous rappelons qu'un argument illisible est systématiquement considéré comme faux. Nous rappelons également que la copie rendue n'est pas un brouillon. Quand plusieurs pistes ont été poursuivies, celles qui ont été abandonnées doivent être clairement rayées.

Forme. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses soient présentées dans l'ordre, et qu'en tout cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire (en cas d'oubli et de manque de place). Bien séparer les différents problèmes, sur des copies différentes par exemple, est une bonne initiative, notamment pour pouvoir par la suite revenir à un problème commencé mais non terminé. Par exemple, une copie dans laquelle le problème A s'arrête à la question *(3c)* puis, entre les deux parties du problème C, ajoute la question *(4c)* prend le risque que cette dernière passe inaperçue.

Il est également demandé que les conclusions soient mises en valeur par exemple en les $\boxed{\text{encadrant}}$ ou en les <u>soulignant</u>. Il est demandé de respecter les numérotations des questions (*(1a)*, *(1b)*, *(2a)*, etc.) et il est apprécié que ces numérotations soit également mises en valeur (en retrait dans la marge, encadrées, en couleur, etc.) car il est courant pour les correcteur·trices d'avoir à revenir en arrière sur une copie ou de revenir sur une copie précédemment corrigée et il est important de pouvoir facilement identifier la question recherchée. La numérotation continue entre les problèmes a d'ailleurs été adoptée dans ce but. Nous sommes heureux de constater les efforts dans la plupart des copies qui les rendent agréables à lire.

Il n'est pas souhaitable de recopier l'énoncé. En plus de faire perdre du temps aux candidat·es, cela est contreproductif car cela rend la copie plus difficile à lire et les réponses plus difficiles à cerner pour les correcteur·trices.

Depuis deux ans, les copies sont numérisées. Cela implique d'utiliser des stylos noirs ou bleus. Néanmoins, pour la mise en lumière des résultats ou des numéros de questions, nous avons observé que souligner ou encadrer à l'aide de n'importe quelle couleur passait bien au scanner et ne posait aucun problème de lecture. Nous encourageons donc les candidat·es à continuer ainsi. Attention toutefois à ne pas utiliser de crayon de papier, notamment pour les illustrations (graphes, tableaux, etc.), car cela ne passe pas bien.

Lecture du sujet. Nous invitons les candidat·es à bien lire le sujet pour éviter des erreurs grossières. Il est courant de traiter d'un problème général et de regarder des cas particuliers ou des exemples. Utiliser les cas particuliers en dehors des questions concernées est dommageable. Par exemple, utiliser dans les questions *(7)* ou *(8)* les vecteurs particuliers de la question *(6)* ou dans la question *(16)* la loi particulière de la question *(15)* est fâcheux. Nous avons veillé à bien insister dans le sujet sur ce point et n'avons observé que de rares confusions cette année.

4 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs ou confusions commises dans plusieurs copies. Le jury tient tout d'abord à préciser que les récurrences en question *(11a)* ont généralement été très bien menées.

— Les fonctions usuelles et leurs domaines de définition sont souvent mal connus, notamment les fonctions puissance et logarithme.

— En règle générale, beaucoup de candidat·es oublient certaines hypothèses lorsqu'il·elles appliquent un théorème. Par exemple, il faut mentionner ou vérifier qu'une fonction est continue et définie sur un intervalle fermé et borné afin d'appliquer le théorème assurant qu'elle atteint ses bornes sur cet intervalle.

— Le théorème sur la limite d'une suite monotone a rarement été appliqué.

— Les définitions de base en algèbre linéaire sont très mal maitrisées (base, dimension, famille libre, famille génératrice, sous-espace vectoriel).

— On a noté plusieurs erreurs sur des notions de logique élémentaire (implication, équivalence). Néanmoins, ces erreurs étaient moins fréquentes cette année.

— Il ne convient pas d'utiliser la locution « par définition » lorsqu'il ne s'agit pas d'une définition. Par exemple, en *(7)*, il est vrai que $E \subset \mathbf{R}^n$ par définition mais il est incorrect de dire que $\dim(E) \leq \dim(\mathbf{R}^n)$ par définition ; il s'agit là d'une propriété.

— Nous avons vu encore trop d'hérésies probabilistes comme :

  ⋆ $P(X = n) \cap P(X_1 = 1)$,

  ⋆ $P(X \cap X_1)$, $P(X)$

  ⋆ $P(\{X = n\} \cap \{X_1 = 1\}) = \varnothing$,

  ⋆ Si $P(X = n)$ alors [...],

  ⋆ $P(\{X = n\} \cap \{X_1 = 1\})$ n'existe pas,

  ⋆ et toujours des probabilités clairement hors de $[0, 1]$.

— Nous rappelons que deux évènements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$ et non si $P(A \cap B) = 0$ ou si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Ces dernières sont des conséquences.

— Nous rappelons également que la notion d'indépendance a une définition mathématique formelle.

— Lorsqu'il est demandé de montrer une formule de cours, il faut la montrer. De même, s'il est demandé de déduire une formule des résultats précédents, il ne s'agit pas de dire que c'est une formule du cours. Ainsi, en *(10a)*, une démonstration était attendue et en *(10b)*, il s'agissait d'appliquer le résultat précédent.

— La définition de l'espérance n'est pas une application de la formule de transfert.

— La formule des probabilités totales, bien qu'appliquée de façon convenable, n'a quasiment jamais été correctement énoncée.

5 Commentaires détaillés

Détaillons à présent question par question les erreurs les plus fréquentes.

PROBLÈME A.

(1) *(1a)* Question bien traitée dans l'ensemble, quoique plusieurs candidat·es ont calculé $[\ln(x)]_{\varepsilon}^{1} = \ln(\varepsilon) - \ln(1) = \ln(\varepsilon)$.

(1b) Question bien traitée dans l'ensemble, bien que de nombreuses copies obtenaient la valeur grossièrement fausse de 0 ou $-\infty$.

(1c) On pouvait appliquer le changement de variable $y = -x$, ou utiliser une primitive de $x \in \mathbf{R}_{-}^{*} \mapsto \frac{1}{x}$. Nous avons accepté également les preuves utilisant l'imparité de la fonction inverse. Toute utilisation de $\ln(a)$ pour un $a \leq 0$ a conduit à la note nulle (nous n'avons bien sûr pas sanctionné les copies qui mentionnait que $\ln$ n'était pas défini sur $\mathbf{R}_{-}$).

(1d) Question bien traitée dans l'ensemble. Il fallait bien justifier que la quantité entre parenthèses était nulle pour tout ε fixé, pour ensuite passer à la limite.

(2) *(2a)* Plutôt bien réussie. Certain·es candidat·es n'ont pas vu qu'il fallait appliquer le changement de variable uniquement dans la première intégrale.

(2b) Question bien traitée dans l'ensemble.

(3) *(3a)* La fonction $x \in \mathbf{R}_{+} \mapsto x^{a}$, pourtant explicitement indiquée dans le programme comme fonction usuelle, semble mal connue et les manipulations sur la valeur absolue sont hasardeuses. Beaucoup de candidat·es ont supposé que a était entier ; beaucoup également se sont retrouvé·es avec des puissances de nombres strictement négatifs, par exemple en appliquant à $f(-x)$ la formule indiquée pour $f(x)$ avec un $x > 0$. Pour l'imparité, assez peu de preuves correctes. Des points partiels ont toutefois été attribués très régulièrement.

(3b) Il fallait mentionner l'utilisation de *(2b)* et *(3a)*.

(3c) Assez bien réussie lorsque la définition de $I(a)$ était comprise (certain·es candidat·es avaient une dépendance en ε).

(3d) Question difficile. Beaucoup de candidat·es ont compris qu'on pouvait chercher un contre-exemple à l'aide des fonctions f_a restreintes à $[-1, 1]$. En revanche, il a été rarement vu que le membre de droite dépend a priori de la fonction choisie, mais que pour les fonctions f_a il se trouve que $\sup_{x \in [-1,1]} |f_a(x)| = 1$, *quel que soit* $a > 0$. Nous avons toutefois été agréablement surpris par l'intuition de la plupart des candidat·es ayant abordé cette question.

(4) *(4a)* Les hypothèses du théorème utilisé devaient clairement apparaitre, en particulier que $[-1, 1]$ est un intervalle **fermé** et **borné**. On ne pouvait se contenter de dire que l'image par h' de $[-1, 1]$ est bornée.

(4b) Assez bien réussie lorsque traitée. Fréquentes confusions entre $\max_{y\in[-x,x]} |h'(y)|$ et $\max_{y\in[-1,1]} |h'(y)|$.

(4c) Il fallait majorer $\max_{y\in[-x,x]} |h'(y)|$ par $|h'(y_0)|$ **avant** d'intégrer. Assez peu de candidat·es l'ont fait convenablement. Les notations trop floues sur le max comme $\max |h'(y)|$ sans plus de précision ont été pénalisées. Il fallait aussi observer que $\int_\varepsilon^1 \mathrm{d}x \leq 1$.

(4d) L'existence de la limite n'a été que très rarement prouvée, seul le caractère fini a généralement été observé. Beaucoup de candidat·es pensent que toute suite bornée converge.

(5) Question rarement abordée, mais assez bien traitée le cas échéant.

PROBLÈME B.

(6) *(6a)* Question basique pourtant moins bien réussie qu'escompté. La liberté est généralement bien montrée. Beaucoup de candidat·es pensent que 3 vecteurs de $\mathbf{R}^3$ sont toujours générateurs. De très nombreuses confusions entre dimension et cardinal.

(6b) Là aussi, notion basique très mal maitrisée par beaucoup de candidat·es. Confusion fréquente entre non vide et non nul également. Un très grand nombre de copies montre une totale confusion entre stabilité par combinaison linéaire d'un ensemble et application linéaire.

(6c) Bien réussie dans l'ensemble. Erreurs de calcul assez courantes.

(6d) Beaucoup trop de dimensions supérieures ou égales à 4, révélant une très mauvaise compréhension des bases de l'algèbre linéaire. Beaucoup de dimension 3 également, soit en se contentant d'éliminer les vecteurs nuls et les opposés dans la liste, ou en ajoutant de façon péremptoire que les trois vecteurs restant sont libres.

(7) *(7a)* Il fallait mentionner la liberté de la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. De très nombreuses copies ne font que l'implication facile et concluent tout de même l'équivalence.

(7b) De nombreuses tentatives infructueuses de supprimer des vecteurs de la famille $(w_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Les candidat·es ayant observé que E était un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ ont souvent ajouté des informations inutiles.

(7c) Question peu réussie. Contrairement au cadre calculatoire de la question *(6a)*, la notion théorique de liberté est souvent mal comprise. Beaucoup de candidat·es confondent liberté d'une famille et non colinéarité deux à deux.

(7d) Bien réussie lorsque comprise. Une erreur fréquente de comptage donnant une dimension n aurait pu facilement être évitée en vérifiant sur un cas simple (ou en regardant *(6d)*).

(8) *(8a)* Question mieux réussie que nous pensions. Néanmoins, beaucoup d'exemples aléatoires donnés sans justification. L'exemple $a = 1$ et $b = -1$ devait s'appuyer sur la question *(7)* pour être valide ; dans ce cas la cohérence primait sur le résultat : les candidat·es ayant trouvé une dimension égale à n en *(7e)* et justifiant ainsi que $E = F = \mathbf{R}^n$ dans ce cas obtenaient les points de raisonnement en *(8a)*.

(8b) Question bien traitée dans l'ensemble. Des confusions fréquentes entre condition nécessaire et condition suffisante. À nouveau, souvent un manque de justification ; faire référence au déterminant (et non *discriminant* comme nous l'avons fréquemment lu) suffisait.

(8c) Très peu de candidat·es ont pensé à inverser la matrice. Les candidat·es ayant traité cette question ont presque toujours travaillé directement sur le système. Les calculs ont souvent été abandonnés.

(8d) Question peu abordée mais bien traitée dans l'ensemble.

(8e) Question difficile car ouverte, très peu abordée, si ce n'est en conjecturant la réciproque de *(8d)*. De façon surprenante, même les cas $a = b = 0$, pourtant très souvent utilisés en *(8a)*, et $a = -b = 1$ n'ont pas été traités.

PROBLÈME C.

(9) *(9a)* Question bien traitée dans l'ensemble.

(9b) Question plutôt bien traitée dans l'ensemble. Il ne fallait pas oublier de mentionner l'indépendance.

(9c) Comme indiqué plus haut, l'incompatibilité a très souvent été comprise comme $P(\{X = n\} \cap \{X_1 = 1\}) = 0$.

(9d) Une réponse mathématique était attendue, à savoir un exemple de valeurs k et ℓ telles que $P(\{X = k\} \cap \{X_1 = \ell\}) \neq P(X = k)P(X_1 = \ell)$, le sujet suggérant $k = n$, $\ell = 1$. Les réponses sans calcul comme « X est définie à partir de X_1 donc elles ne sont pas indépendantes » n'ont pas obtenu de points.

(10)(10a) Question plutôt bien traitée dans l'ensemble, malgré toutefois de nombreuses erreurs de calcul. Il ne fallait pas oublier de mentionner l'indépendance et justifier la valeur de $P(X_1 \geq k)$.

(10b) Peu de candidat·es ont mené les calculs jusqu'au bout. Beaucoup de tentatives basées sur une décomposition en évènements disjoints erronée. Les candidat·es ont souvent remplacé le dénominateur n par $n - 1$.

(11)(11a) Une **preuve** était attendue. L'application d'une formule du cours n'a pas été acceptée. Les deux preuves les plus vues étaient par récurrence ou bien en additionnant $1 + 2 + \cdots + n$ et $n + (n - 1) + \cdots + 1$ et ont toutes les deux été acceptées. Les preuves géométriques ont également été acceptées. La preuve consistant à couper la somme en deux et à regrouper les termes nécessitait un traitement différent en fonction de la parité de n.

(11b) Il s'agissait de **déduire** la valeur de l'espérance de la question précédente. Les formules données sans justification n'ont pas obtenu de points.

(11c) Cette question utilisait le résultat de *(10b)* et *(9b)* (ou éventuellement *(10a)*). Beaucoup ont fait apparaitre fallacieusement $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$.

(11d) Question bien traitée dans l'ensemble. Attention à bien simplifier les résultats et ne pas s'arrêter à $2/6$.

(12)(12a) Question bien traitée dans l'ensemble. Beaucoup d'oubli du cas $x < 0$. Un nombre important de résultats clairement hors de $[0, 1]$ est à déplorer.

(12b) Question plutôt bien traitée dans l'ensemble. Il ne fallait pas oublier de mentionner l'indépendance.

(12c) Question bien traitée dans l'ensemble. On rappelle que le paramètre d'une loi exponentielle est positif.

(13) De nombreuses tentatives complètement farfelues, généralement par des candidat·es n'ayant pas vraiment traité les questions précédentes. La loi $Z = 1$ a souvent été donnée.

(14)(14a) Le jury est scandalisé par les résultats de cette question basique de cours et explicitement écrite dans le programme, avec toutes les hypothèses. Sur 957 copies, seulement 81 candidat·es ont obtenu 3/4 et seuls 8 candidat·es ont obtenu la totalité des points. Nous rappelons que la formule des probabilités totales s'énonce comme dans le programme, en conditionnant par les évènements d'une famille complète d'évènements **de probabilité strictement positive**, et non par une variable aléatoire.

(14b) La formule des probabilités totales a bien été appliquée. Le fait que la somme débute à ℓ a souvent mal été justifié. Au vu de la question précédente, presque personne n'a mentionné que $P(Y = k) > 0$ pour les k considérés.

(14c) Question plutôt bien traitée lorsqu'abordée.

(15)(15a) Question bien traitée dans l'ensemble. Des erreurs de calculs toutefois, notamment « $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} \frac{2}{m(m+1)} = \frac{2}{m(m+1)}$ » ou « $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} \frac{2}{m(m+1)} = \frac{2m}{m(m+1)}$ ».

(15b) Question bien traitée lorsque la formule de Bayes était connue. Personne n'a noté qu'on obtenait une loi uniforme.

(16)(16a) Question bien traitée dans l'ensemble. Une justification intuitive suffisait à obtenir les points.

(16b) Question bien traitée dans l'ensemble.

(16c) Question bien traitée dans l'ensemble, généralement en développant la somme. Rares sont les candidat·es qui ont reconnu une application de la formule de transfert.

(16d) Question calculatoire très peu abordée. Certain·es candidat·es ont réussi à mener les calculs à termes.

(17)(17a) Question bien traitée lorsque la définition d'une loi de Poisson est connue. Un décalage d'indice a souvent été observé.

(17b) Commentaire similaire à *(14b)*. Il s'agissait d'appliquer la formule des probabilités totales et non d'utiliser un passage à la limite lorsque $m \to +\infty$ dans l'égalité de la question *(14b)*.

(17c) Question bien traitée dans l'ensemble. La série exponentielle a généralement été reconnue mais on a souvent lu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$.