Révisions fin de HK3

Exercice 1. Corrigé ex. 1

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculer w_0 et justifier que w_n est bien défini pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
   (c) En déduire la nature de la suite (w_n) et exprimer w_n en fonction de n.
4) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.
5) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer que pour tout n de $\mathbf{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 2. Corrigé ex. 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1) (a) Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
   (b) Soit $I_2 = \displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2.
2) La suite (J_n) est définie pour tout entier naturel n par : $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer J_1 puis $J_0 + J_1$. En déduire J_0.
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer $J_n + J_{n+1}$.
   (c) Prouver que pour tout x dans l'intervalle $[0;1]$: $\dfrac{e^{nx}}{1+e} \leqslant \dfrac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \dfrac{e^{nx}}{2}$. En déduire un encadrement de J_n.
   (d) En déduire les limites des suites (J_n) et $\left(\frac{J_n}{e^n}\right)$.

Exercice 3. Corrigé ex. 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A.

1) Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
2) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f - 4id$. En déduire le noyau de $f - 4id$.
3) Déterminer un vecteur v de $\mathbf{R}^3$ de première composante égale à 1 tel que $f(v) = 4v$.
4) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Corrigé ex. 4

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on considère l'équation notée (E_n) :

$$g(x) = n, \qquad \text{où l'inconnue est le réel } x.$$

1) (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.
   (b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions , l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.
2) Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

   (a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$
   Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.
   (b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$.
   (c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate,
   montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leq b \leq -1$, $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b-a)$.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$.
   (e) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente et de limite α_2.
3) On revient au cas général où $n \geq 2$.
   (a) Montrer que $1 \leq g(\ln n) \leq n$. En déduire que $g(\ln(2n)) \geq n$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,69$).
   (b) En déduire que $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$, puis établir que la suite $\left(\frac{\beta_n}{\ln(n)}\right)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5. Corrigé ex. 5

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on note I_3 la matrice identité.

1) Déterminer M^3 puis en déduire que M n'est pas inversible.
2) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 (*i.e.* de taille 3×3) vérifiant $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

(a) Montrer que A n'est pas inversible.
(b) Vérifier que $X^3 = 1 - (1-X)\left(1+X+X^2\right)$.
(c) Montrer que $I_3 - A$ est inversible et calculer son inverse.

3) Montrer également que $I_3 + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 6. Corrigé ex. 6

Un nombre réel x est dit *rationnel* s'il est de la forme

$$x = \frac{p}{q} \text{ pour un certain } p \in \mathbf{Z} \text{ et un certain } q \in \mathbf{N}^*$$

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit *irrationnel*. Nous avons prouvé cette année que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Le but de ce problème est, entre autres, de montrer l'irrationalité du nombre $e = \exp(1)$.

1) **Suites adjacentes.** Cette partie peut être admise dans un premier temps, elle fait partie des résultats du cours.
Rappel : les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente vers 0.
On considère dans cette question $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles adjacentes. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

(a) Étudier les variations de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
(b) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'on a : pour tout n dans $\mathbf{N}, u_n \leqslant v_n$.
(c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

2) **Le nombre e**
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

(a) Calculer la valeur de r_0.
(b) En effectuant une intégration par parties, calculer la valeur de r_1.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n$$

(e) Montrer que pour tout $\in \mathbf{N}$, $0 \leqslant r_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}$. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

(f) Montrer que la suite (u_n) tend vers e lorsque n tend vers l'infini.

3) **Un premier encadrement de e.**

(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
(b) Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, $1 + x + x^2 \geqslant \mathrm{e}^x$.
(c) En déduire que $2 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 3$.

4) **Une deuxième méthode pour encadrer e.**

(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire que $\mathrm{e} > 2$.
(b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.
(c) Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 1$.
(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant 3$ et en déduire que $2 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 3$.

5) **Irrationalité de e.**
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes.

En raisonnant par l'absurde, on se propose de montrer que le nombre e est irrationnel. Pour ce faire, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p, q premiers entre eux tels que $e = \frac{p}{q}$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$u_n < e < v_n$$

(c) En déduire que :

$$q!u_q < q!e < q!u_q + \frac{1}{q}$$

(d) Mettre en évidence une contradiction (noter que $q\,!\,u_q$ est un nombre entier) et conclure.

Exercice 7. **Oral TSE 2024 pl. 4** Corrigé ex. 7

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on considère la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f_n : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x} - 1. \end{aligned}$$

1) Pour tout $n \geq 3$, montrer que f_n est une bijection sur l'intervalle $[0, n]$.
2) Pour tout $n \geq 3$, montrer que l'équation :

$$x^n = e^x$$

admet une et une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$. On la note x_n.

3) Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a :

$$1 < x_n < n$$

4) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
5) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ converge.
6) Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a :

$$\ln(x_n) = \frac{x_n}{n}.$$

7) En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.
8) Établir le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Oral TSE 2024 pl. 5 sans préparation Corrigé ex. 8

Soit $E = \mathbf{R}^n$ considéré comme un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux espaces vectoriels supplémentaires de E. On considère p la projection sur F de direction G. On définit s par

$$s = 2p - \mathrm{id} \quad \text{où id est l'application identité de } E.$$

1) Montrer que s est une application linéaire de E vers E.
2) Montrer que $s^2 = \mathrm{id}$.
3) Montrer que s est une application linéaire bijective de E vers E.
4) En déduire $\operatorname{Ker}(s)$ et $\operatorname{Im}(s)$.
5) Montrer que $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 9. Oral TSE 2024 pl. 8 Corrigé ex. 9

On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 2y_n + 4z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 2y_n + 3z_n \end{cases}$$

les réels x_0, y_0 et z_0 étant donnés.

1) Écrire le système sous forme matricielle $V_{n+1} = AV_n$ où
$$V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$
2) Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ est A.
3) Montrer que $V_n = A^n V_0$, pour tout $n \geq 1$.
4) On considère la famille $\mathcal{E} := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
5) Déterminer M, la représentation matricielle de f dans la base $\mathcal{E}$.
6) Pour tout $n \geq 1$, calculer M^n.
7) En déduire A^n, pour tout $n \geq 1$.
8) Pour tout $n \geq 1$, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 10. Oral TSE 2024 pl. 10 Corrigé ex. 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x.$$

1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ est bien défini.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 .
3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$
5) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6) En faisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$$
7) Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$
8) $\star$ En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 11. Oral TSE 2024 pl. 10 sans préparation Corrigé ex. 11

ATTENTION Hors programme de première année.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 2 .

1) Montrer que la famille $\{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$ est liée.
2) Peut-on toujours extraire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la famille $\{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$?
3) Montrer que si $I_2 \in \operatorname{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$, alors A est inversible.
4) Soit A non inversible. Peut-on affirmer que $I_2 \notin \operatorname{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$?
5) On suppose ici $I_2 \notin \operatorname{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$.
   (a) Justifier que la famille $\{A, A^2, A^3, A^4\}$ est liée.
   (b) En déduire que A n'est pas inversible.

Corrigé ex. 1.

1) On a $u_0 = -1$ puis $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{3}{4}$. Comme $u_0 < 0$ et que u_1 et u_2 sont positifs, la suite u n'est pas géométrique. D'autre part, $u_1 - u_0 = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{4} = u_2 - u_1$ donc la suite u n'est pas arithmétique.

2) (a) $v_0 = 1$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) = \frac{1}{2}v_n.$$

   (c) On déduit des deux questions précédentes que v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$. Donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3) (a) On a $w_0 = -1$ et d'après la question 2)(c), pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n > 0$ donc w_n est bien défini.

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$; par définition, $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ donc $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$; on calcule

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{2v_n}{v_n} + \frac{2 \times \frac{1}{2}u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n.$$

   (c) Ainsi w est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = -1$. On en déduit : $w_n = -1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) D'après la définition de w, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = w_n \times v_n = (-1 + 2n) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5) On procède par récurrence sur n : pour $n = 0$, on a $S_0 = u_0 = -1$. D'autre part, pour $n = 0$, on a $2 - \frac{2n+3}{2^n} = 2 - 3 = -1$. La formule donnant S_n en fonction de n est donc vraie au rang 0.
   Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$. Calculons S_{n+1} :

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1} &= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ = 2 - \frac{4n+6}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} &= 2 - \frac{(4n+6)-(2n+1)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

   Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n. Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Corrigé ex. 2.

1) (a) Il faut calculer une intégrale donc le premier réflexe est de trouver une primitive (si vous avez lu l'énoncé avant de commencer, vous avez remarqué que les IPP arrivent plus loin).
   - La fonction intégrée est-elle continue sur l'intervalle considéré ?
   - Pour quelle raison ? C'est une quotient !
   - A-t-on une façon simple de « primitiver » un quotient ? Non, il faut que le quotient soit de forme particulière ! $\frac{u'}{u}$ ou $\frac{u'}{u^n}$ ...

   (b) Penser à la linéarité. Il faut ABSOLUMENT écrire des choses sur votre brouillon, c'est une question TRÈS facile.

2) (a) Même procédé que ci-dessus.

   (b) Même procédé que ci-dessus : linéarité de $\int$

   (c) Observer l'encadrement voulu est primordial : les facteurs qui « changent » sont sous le dénominateur donc on commence par essayer d'encadrer le dénominateur uniquement. Seul le dénominateur du « milieu » dépend de x donc c'est lui qu'il faut étudier.
   Ensuite, on passe à l'inverse et on multiplie par le numérateur sans oublier les arguments INDISPENSABLES permettant de faire ces calculs.

   (d) Le théorème d'encadrement doit-être utile ici.

Corrigé ex. 3.

1) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y-2z \\ -x+3y+z \\ -x-y+z \end{pmatrix}$.
   Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} 2x-2y-2z=0 \\ -x+3y+z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ \quad 2y=0 \\ \quad -2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

   Ainsi $\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Une base de $\mathrm{Ker} f$ est donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{R}^3 &= \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f \\ 3 &= 1 + \dim \mathrm{Im}\, f \end{aligned}$$

   Ainsi $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$.
   D'après le cours, on sait que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right),$$

   où e_1, e_2, e_3 est la hase canonique de $\mathbf{R}^3$.
   Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

   Les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_3)$ sont colinéaires donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   La famille $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2) Dans n'importe quelle base (et donc dans la base canonique) la matrice de id est la matrice I_n, diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.
   Ainsi, dans la base canonique, la matrice de $f - 4id$ est

$$\begin{aligned} M = A - 4I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le noyau de $f-4id$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$:

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(f-4id) \iff \begin{cases}-2x-2y-2z=0\\-x-y+z=0\\-x-y-3z=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}x+y+z=0 & -\frac{1}{2}L_1\\x+y-z=0 & -L_2\\x+y+3z=0 & -L_3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}x+y+z=0\\-2z=0 & L_2-L_1\\2z=0 & L_3-L_1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}x+y=0\\z=0\end{cases}$$

Donc $\ker(f-4id)=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\0\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbf{R}\right\}=\operatorname{vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

3) En posant $v=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, on a, d'après la question précédente :

$$(f-4id)(v)=0 \iff f(v)-4v=0 \iff f(v)=4v.$$

Ainsi, $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ convient.

4) On cherche une base $\Delta(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ telle que.

$$\operatorname{mat} f=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}f(\delta_1)&f(\delta_2)&f(\delta_3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\end{array}$$

Pour avoir δ_1 un vecteur d'une base (donc un vecteur non nul) et $f(\delta_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, on doit avoir $\delta_1\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\delta_1\in\ker f$.

D'après la question 1), $\delta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ convient.

D'après la question 3) $\delta_3=v=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ permet d'obtenir : $f(\delta_3)=4\delta_3$ et on remarque que (δ_1,δ_3) est une famille libre.
On cherche donc un vecteur δ_2 tel que $f(\delta_2)=2\delta_2$ et $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

En suivant le cheminement des questions 2)et 3), on cherche dejà le noyau de $f-2id$.

En posant $N=A-2I_3=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$, on trouve que

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}(f-2id)\iff\begin{cases}-2y-2z=0\\-x+y+z=0\\-x-y-z=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x+y+z=0 & -L_3\\x-y-z=0 & -L_2\\y+z=0 & -\frac{1}{2}L_1\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x+y+z=0\\-2y-2z=0 & L_2-L_1\\y+z=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x=0\\y=-z\end{cases}$$

Finalement $\ker(f-2id)=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\-y\end{pmatrix}\middle|\, y\in\mathbf{R}\right)=\operatorname{vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

En posant $\delta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, on a

$$(f-2id)(\delta_2)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff f(\delta_2)-2\delta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff f(\delta_2)=2\delta_2$$

Il reste à vérifier que $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Comme cette famille comporte 3 vecteurs et que $\dim(\mathbf{R}^3)=3$, il suffit de prouver que la famille $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ est libre.

C'est-à-dire, montrons que $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est libre.
En effet, considérons α_1,α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2+\alpha_3\delta_3=O_{\mathbb{R}^3}$.

$$i.e.\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\\alpha_2-\alpha_3=0\\\alpha_1-\alpha_2\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\\alpha_2-\alpha_3=0\\-\alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\\alpha_2=\alpha_3\\\alpha_2=-\alpha_3\end{cases}$$

donc $\alpha_2=0$ puis $\alpha_3=0$ et $\alpha_1=0$.
Ainsi : la seule solution du système initial est $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ donc la famille $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ est libre. L'argument de dimension permet de conclure que c'est une base de $\mathbf{R}^3$. Et dans cette base, la matrice de f est $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

Corrigé ex. 4.

1) (a) La fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de telles fonctions.

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0 \quad\text{donc}\quad \lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty.$$

Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $g(x)=\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$ ainsi, grâce au théorème des croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty.$$

Pour tout x de $\mathbf{R}$, on a $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ donc $(g'(x) > 0) \iff (\mathrm{e}^x > 1) \iff (x > 0)$.
On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, on distingue deux cas : $x \in]-\infty; 0]$ et $x \in [0, +\infty[$.

— La fonction g est continue et strictement monotone sur $]-\infty; 0]$. On a $g(0) = 1 < n$ et, comme $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, il existe $A \in]-\infty; 0[$ tel que $g(A) > n$. Ainsi n est compris entre $g(0)$ et $g(A)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha_n \in [A, 0]$ tel que $g(\alpha_n) = n$. On a bien $\alpha_n < 0$ et, en utilisant la monotonie de g, l'équation $g(x) = n$ n'admet pas d'autre solution sur $]-\infty; 0]$.

— On procède de même sur l'intervalle $[0, +\infty[$ pour trouver β_n.

2) (a) On sait que ln est strictement croissante et que $\ln(1) = 0$ donc $\mathrm{e} > 1$ (en fait on a même $e > 2$ et il est bon de savoir que $\mathrm{e} \approx 2,718$).

On a $g(-1) = \mathrm{e}^{-1} + 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 < 2$ et $g(-2) = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 + 2 > 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur l'intervalle $[-2; -1]$ à la fonction continue g et à la valeur intermédiaire 2, on obtient que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution sur l'intervalle $[-2, -1]$. Par unicité de α_2 sur $\mathbf{R}^-$, on en déduit que

$$-2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1.$$

(b) On sait que $g(\alpha_2) = 2$ donc $\mathrm{e}^{\alpha_2} - \alpha_2 = 2$ d'où $\mathrm{e}^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
On a $u_0 = -1$ donc $\alpha_2 \leqslant u_0 \leqslant -1$.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha_2 \leqslant u_k \leqslant -1$.
Comme la fonction exp est croissante, on a $\mathrm{e}^{\alpha_2} \leqslant \mathrm{e}^{u_k} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ et en enlevant 2, on trouve $\mathrm{e}^{\alpha_2} - 2 \leqslant \mathrm{e}^{u_k} - 2 \leqslant \mathrm{e}^{-1} - 2$.
Comme $0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant 1$, on a $\mathrm{e}^{-1} - 2 \leqslant -1$ et comme $\mathrm{e}^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$ et $\mathrm{e}^{u_k} - 2 = u_{k+1}$. On a

$$\alpha_2 \leqslant u_{k+1} \leqslant -1$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\alpha_2 \leqslant u_k \leqslant -1$.

(c) Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b \leqslant -1$. La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ donc sur $[a, b]$; de plus sa dérivée en x est $exp(x)$. Comme exp est croissante sur $\mathbf{R}$, on peut écrire le théorème des accroissements finis sur $[a, b]$ comme :

$$\exists c \in]a, b[,\ 0 \leqslant \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^c(b - a).$$

Comme $c \in [a, b]$, on a $c \leqslant -1$ donc $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^{-1}$ en utilisant encore la croissance de exp. Donc

$$0 \leqslant \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}(b - a).$$

(d) Soit $k \in \mathbf{N}$, on écrit

$$u_{k+1} - \alpha_2 = u_{k+1} \underbrace{+2-2}_{0} - \alpha_2 = \overbrace{u_{k+1} + 2}^{\mathrm{e}^{u_k}} \underbrace{-2 - \alpha_2}_{-\mathrm{e}^{\alpha_2}} = \mathrm{e}^{u_k} - \mathrm{e}^{\alpha_2}.$$

Comme suggéré, on procède par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$.
On sait que $u_0 = -1$ et que $-2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$, on en déduit que $0 \leqslant u_0 - \alpha_2 \leqslant 1 = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^0$.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leqslant u_k - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$.
D'après la première partie de la question, $u_{k+1} - \alpha_2 = \mathrm{e}^{u_k} - \mathrm{e}^{\alpha_2}$ et d'après la question précédente appliquée à $\alpha_2 \leqslant u_k \leqslant -1$ on a $\mathrm{e}^{u_k} - \mathrm{e}^{\alpha_2} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}(u_k - \alpha_2)$. Ainsi

$$u_{k+1} - \alpha_2 = \underbrace{\mathrm{e}^{u_k} - \mathrm{e}^{\alpha_2}}_{\geqslant 0} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}(u_k - \alpha_2) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}.$$

Donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_k - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$.

(e) Comme $-1 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant 1$, on en déduit que $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = 0$.
Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{k \to +\infty} u_k - \alpha_2 = 0$ et $\lim_{k \to +\infty} u_k = \alpha_2$.

3) (a) Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.
Tout d'abord, $g(\ln(n)) = \mathrm{e}^{\ln(n)} - \ln(n) = n - \ln(n)$.
Or, comme $n \geqslant 2$, en particulier, $n \geqslant 1$ donc $\ln(n) \geqslant 0$ et ainsi $g(\ln(n)) \leqslant n$.
De plus, comme $\ln(n) \geqslant 0$, d'après le tableau de variations de g, on a $g(\ln(n)) \geqslant 1$.
D'où, pour tout $n \geqslant 2$,

$$1 \leqslant g(\ln(n)) \leqslant n.$$

Ensuite,

$$g(\ln(2n)) = 2n - \ln(2n) = 2n - (\ln 2 + \ln n) = n + n - \ln 2 - \ln n = n + g(\ln n) - \ln 2$$

Or, d'après l'énoncé $\ln 2 \approx 0,69$ et $g(\ln n) \geqslant 1$ donc $g(\ln n) - \ln 2 \geqslant 0$ et $g(\ln(2n)) \geqslant n$.

(b) Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue g sur l'intervalle $[\ln n; \ln(2n)]$ avec la valeur intermédiaire n permet d'affirmer l'existence d'une solution à l'équation $g(x) = n$ dans l'intervalle $[\ln n; \ln(2n)]$. Par définition, cette solution est β_n et donc

$$\ln n \leqslant \beta_n \leqslant ln(2n)$$

$$\text{D'où, en divisant par } \ln n \geqslant 0, \quad 1 \leqslant \frac{\beta_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(2n)}{\ln n} = \frac{\ln 2}{\ln n} + 1.$$

Il est clair que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln 2}{\ln n} = 0$ donc par comparaison, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\beta_n}{\ln n} = 1$.

Corrigé ex. 5.

1) On trouve que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et M^3 est la matrice nulle.

Plusieurs raisonnements sont possibles :

— La matrice M contient une colonne de 0 donc l'application canoniquement associée n'est pas surjective donc pas bijective donc sa matrice (la matrice M) n'est pas inversible.

— Si f est injective alors $f \circ f$ est injective ; comme M^3, la matrice de f^3 est nulle, f^3 n'est pas injective et donc f n'est pas injective. En particulier, f n'est pas bijective donc sa matrice (M) n'est pas inversible.

— Plus naturel dans cet exercice : supposons M inversible, alors on a

$$\begin{aligned} M^3 &= 0 \\ M^{-1}M^3 &= M^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbf{R})} && \text{on mult. à gauche par } M^{-1} \\ M^2 &= 0_{\mathscr{M}_3(\mathbf{R})} && \text{car } M^{-1}M^3 = M^{-1}MM^2 = I_2M^2 = M^2 \end{aligned}$$

Or $M^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbf{R})}$ donc M n'est pas inversible.

2) (a) Le même raisonnement que le dernier item de la question précédente permet de conclure : supposons A inversible, alors on a

$$\begin{aligned} A^3 &= 0 \\ A^{-1}A^3 &= A^{-1} \times 0_{\mathscr{A}_3(\mathbf{R})} && \text{on mult. à gauche par } A^{-1} \\ A^2 &= 0_{\mathscr{A}_3(\mathbf{R})} && \text{car } A^{-1}A^3 = A^{-1}AA^2 = I_2A^2 = A^2 \end{aligned}$$

Or $A^2 \neq 0_{\mathscr{A}_3(\mathbf{R})}$ donc A n'est pas inversible.

(b) On développe $1-(1-X)\left(1+X+X^2\right) = 1-\left(1+X+X^2\right)+\left(X+X^2+X^3\right) = 1-1+X^3 = X^3$.
Remarque : on peut aussi remarquer que $1+X+X^2$ est une somme géométrique...

(c) D'après la question précédente, pour toute matrice A, $A^3 = I_3-(I_3-A)\left(I_3+A+A^2\right)$. Comme $A^3 = 0$, on obtient : $(I_3-A)\left(I_3+A+A^2\right) = I_3$. De même $X^3 = 1-\left(1+X+X^2\right)(1-X)$ donc $\left(I_3+A+A^2\right)(I_3-A) = I_3$.
Ainsi, (I_3-A) est inversible et son inverse est $\left(I_3+A+A^2\right)$.

3) Il suffit de remarquer $X^3 = (1+X)\left(1-X+X^2\right)-1$.
Donc l'inverse de I_3+A est $\left(I_3-A+A^2\right)$.

Corrigé ex. 7.
Oral TSE, corrigé par TSE.

1) Pour tout n, f_n est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \begin{cases} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}(n-x) & \text{si } n > 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Sur $[0,n[$, $f_n'(x) > 0$ donc elle forme une bijection.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^n = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x^n\mathrm{e}^{-x}-1 = 0 \Leftrightarrow f_n(x) = 0.$$

D'après la question 1), f_n est strictement monotone sur $[0,n]$. De plus f_n est continue sur $[0,n]$ avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(n) = (n/\mathrm{e})^n - 1 > 1^n - 1 = 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $x^n = \mathrm{e}^x$ admet une unique solution sur $[0,n]$.

3) Pour tout $n \geq 3$, on a $f_n(1) = \mathrm{e}^{-1}-1 < 0$. On a vu ci-dessus que pour tout $n \geq 3$, $f_n(n) > 0$. Donc $f_n(1) < f_n(x_n) < f_n(n)$. Or f_n est strictement croissante sur $[0,n]$ donc $1 < x_n < n$.

4) Par définition $x_{n+1}^{n+1}\mathrm{e}^{-x_{n+1}} = 1$. Or d'après la question précédente, $x_n > 1$ pour tout $n \geq 3$. Donc en divisant $x_{n+1}^{n+1}\mathrm{e}^{-x_{n+1}} = 1$ par x_{n+1} on obtient $x_{n+1}^{n}\mathrm{e}^{-x_{n+1}} < 1$. Ce qui est équivalent à $f_n(x_{n+1}) < 0$. Or $f_n(x_n) = 0$ donc $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$. Comme pour tout $n \geq 3, 1 < x_n < n$ et que f_n est strictement croissante sur $[0,n]$, on en déduit que $x_{n+1} < x_n$ pour tout $n \geq 3$. Ce qui assure la décroissance de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.

5) La suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est décroissante minorée par 1 donc elle converge.

6) Par définition de x_n on a $x_n^n = \mathrm{e}^{-x_n}$. Comme les deux termes de l'égalité sont positifs, on a pour tout $n \geq 3$:

$$n\ln(x_n) = x_n$$

qui assure le résultat attendu en divisant par n.

7) À la limite ℓ on a $\ln(\ell) = 0$. Comme ln est continue et bijective on a donc $\ell = 1$.

8) On distingue suivant la parité de n :

— Si n est pair, $n \neq 0$:

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

— Si $n = 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f_n'		$-$	
f_n		$\searrow$	

— Si $n > 1$ est impair :

x	$-\infty$		n		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

Questions supplémentaires :

1) On pose $y_n = x_n - 1$. Montrer que

$$y_n + 1 = n\ln(1+y_n).$$

2) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} ny_n = 1.$$

3) On pose $z_n = x_n - 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 z_n = \frac{3}{2}.$$

4) Montrer enfin qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$x_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(1/n^2\right).$$

Corrigé ex. 8.
Oral TSE, corrigé par TSE.

1) Soient $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$s(\lambda x+y) = (2p-\mathrm{id})(\lambda x+y) = 2p(\lambda x+y) - (\lambda x+y) = 2\lambda p(x) - p(y) - \lambda x - y = \lambda s(x) + s(y)$
Donc s est une application linéaire. De plus $p : E \to E$ et $\mathrm{id} : E \to E$ donc s est une application linéaire de E vers E.

2) Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} s^2(x) &= s(2p(x)-x) = 2s(p(x)) - s(x) = 2\left[2p^2(x) - p(x)\right] - 2p(x) + x \\ &= 2[2p(x) - p(x)] - 2p(x) + x = x \end{aligned}$$

Donc $s^2 = \mathrm{id}$.

3) On a $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}$ donc s est bijective de E vers E et $s^{-1} = s$.

4) Comme s est bijective $\mathrm{Ker}(s) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(s) = E$.

5) Soit $x \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$. D'où $x = -x$ et $x = 0$.
On va montrer que $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}) = G$: soit $x \in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ on a $s(x) = -x$. Comme $E = F \oplus G$, il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$. On a alors

$$-x = -x_F - x_G = s(x) = s\left(x_F + x_G\right) = 2p\left(x_F + x_G\right) - x_F - x_G = 2x_F - x_F - x_G = x_F - x_G$$

donc $x_F = 0$ et $x = x_G$. Donc $x \in G$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}) = G$.
De même $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) = F$: soit $x \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ on a $s(x) = x$. On a alors

$$x = x_F + x_G = s(x) = s\left(x_F + x_G\right) = 2p\left(x_F + x_G\right) - x_F - x_G = 2x_F - x_F - x_G = x_F - x_G$$

donc $x_G = 0$ et $x = x_F$. Donc $x \in F$ et $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) = F$.
Donc $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont supplémentaires.
Autre méthode qui sera vue en K3 : $s^2 = 1$ donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s. En conséquence $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$ et s est diagonalisable. Par théorème ceci est équivalent au fait que les espaces propres associés à -1 et 1 sont supplémentaires.

Corrigé ex. 9. ç Oral TSE, corrigé par TSE.

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{aligned} f : \quad & \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 3x - 2y + 4z \\ 2x - 2y + 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$V_n = A^n V_0$".
$\mathcal{P}(1)$ est vraie
Supposons $\mathcal{P}$ vraie à un certain rang n. Alors

$$V_{n+1} = Av_n = AA^n V_0 = A^{n+1} V_0$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire et $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
Remarque : si besoin, entraînez-vous à rédiger cette récurrence « correctement ».

4) On considère la matrice associée à la famille :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sa réduite de Gauss est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a 3 pivots non-nuls. La famille est donc une famille de 3 vecteurs qui forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$ elle est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Remarque : la « réduite de Gauss » n'est pas au programme, vous pouvez bien entendu utiliser les termes appris au cours de l'année de HK !

5) On a

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Soit

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $M = I + N$. On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et pour tout $k \geq 3, N^k = 0$.
Les matrices I et N commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \geq 1$,

$$M^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) On a $M = P^{-1}AP$ avec

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+n^2 & -n^2 & n+n^2 \\ 2n+n^2 & 1-2n-n^2 & 3n+n^2 \\ 2n & -2n & 2n+1 \end{pmatrix}$$

8) On a donc

$$\begin{cases} x_n = \left(1+n^2\right) x_0 - n^2 y_0 + \left(n+n^2\right) z_0 \\ y_n = \left(2n+n^2\right) x_0 + \left(1-2n-n^2\right) y_0 + \left(3n+n^2\right) z_0 \\ z_n = 2nx_0 - 2ny_0 + (2n+1)z_0 \end{cases}$$

Corrigé ex. 10.

1) Pour tout n, la fonction

$$x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$$

est continue sur $[0,1]$ car $1+x>0$. Donc l'intégrale est bien définie.

2) Pour tout n, la fonction

$$x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$$

est positive sur $[0,1]$ donc l'intégrale est positive ou nulle.

3) Comme $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$. En divisant par $\sqrt{1+x}>0$ et en intégrant on obtient

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x = u_{n+1}.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Comme $x \in [0,1]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2}$. D'où par décroissance de la fonction inverse

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$$

Ainsi

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \leq x^n$$

En intégrant on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$$

ce qui donne le résultat annoncé.

5) Par le théorème d'encadrement on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .

6) Par intégration par parties on a

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}} \,\mathrm{d}x + \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{1+x}}\right]_0^1$$

D'où

$$u_n = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}.$$

On obtient le résultat annoncé en multipliant par $n+1$.

7) Comme précédemment on a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{1}{2^{3/2}} \leq \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \leq 1$$

D'où

$$\frac{x^{n+1}}{2^{3/2}} \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}} \leq x^{n+1}$$

et

$$\frac{1}{2^{3/2}} \frac{1}{n+2} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que cette intégrale converge vers 0 lorsque n tend vers ∞.

8) On a

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Corrigé ex. 11.

1) Le cardinal de la famille est strictement supérieur à la dimension de l'espace vectoriel : la famille est donc liée.

2) Non, par exemple lorsque $I_2 = A$. On peut aussi penser aux symétries, aux rotations d'angle $\pi/4$ etc.

3) Il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $I_2 = aA + bA^2 + cA^3 + dA^4$. Par conséquent, $I_2 = A\left(aI_2 + bA + cA^2 + dA^3\right)$. D'où A inversible, d'inverse $aI_2 + bA + cA^2 + dA^3$.

4) Cette question est la contraposée de la question précédente. Elle est donc vraie.

5) (a) Puisque $I_2 \notin \operatorname{Vect}\left(A, A^2, A^3, A^4\right)$, le rang de la famille $\left\{A, A^2, A^3, A^4\right\}$ est inférieur ou égal à 3. Autrement dit, la famille est liée.

   (b) Supposons A inversible. Comme la famille $\left\{A, A^2, A^3, A^4\right\}$ est liée, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4/\{(0,0,0,0)\}$ tel que $aA + bA^2 + cA^3 + dA^4 = 0$. On a donc $A\left(aI_2 + bA + cA^2 + dA^3\right) = 0$. En multipliant à gauche par A^{-1}, il vient $aI_2 + bA + cA^2 + dA^3 = 0$. a est nécessairement nul, sans quoi on aurait $I_2 \in \operatorname{Vect}\left(A, A^2, A^3, A^4\right)$. Il vient $bA + cA^2 + dA^3 = 0$. En réitérant, (ou en appliquant la même méthode) on obtient $b=0$, puis $c=0$ et enfin $d=0$ ou une absurdité. On a ainsi montré par l'absurde que A n'est pas inversible.