Calcul numérique et littéral

Exercice 1. Corrigé ex. 1

Écrire sous la forme a^n avec a et n entiers :

1) $\alpha_1 = (10^8)^{11}$
2) $\alpha_2 = 8^3 \times 2^3$
3) $\alpha_3 = \dfrac{10^8}{10^2}$
4) $\alpha_4 = 4^3 \times 2^3$
5) $\alpha_5 = 10^{11} \times 10^5$
6) $\alpha_6 = \dfrac{7^8}{7^2}$
7) $\alpha_7 = (11^2)^5$
8) $\alpha_8 = 5^6 \times 5^9$

Exercice 2. Corrigé ex. 2

Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

1) $A = 9\,x^2 - 4$
2) $B = 1 - 25y^2$
3) $C = -\left(-9\,x - 4\right)^2 + 36\,x^2$
4) $D = (10\,x + 3) \times (-x + 6) - (-x + 6) \times (2\,x - 8)$
5) $E = 100\,x^2 - 80\,x + 16$
6) $F = 6\,x + 1 + (6\,x + 1) \times (8\,x + 2)$
7) $G = (9\,x + 9) \times (9\,x + 3) + (9\,x + 9)^2$
8) $H = 81\,x^2 - 18\,x + 1$
9) $I = -64 + (6\,x - 10)^2$

Exercice 3. Corrigé ex. 3

Soient a, b et c trois réel non nuls.
Écrire sous forme de produit de puissances de a, b et c :

1) $A = \dfrac{(a^2bc)^3}{(ab)^2}$;
2) $B = \dfrac{(a^2bc)^3}{a^2b}$;
3) $C = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c^{-1}}{b}}$;
4) $D = \dfrac{a^3b^2c^7}{a^2bc^5}$;
5) $E = \dfrac{a^2b^4c}{a^3bc^2}$;
6) $F = \dfrac{ac^2 + cb}{c}$;
7) $G = \dfrac{a^{-3}b^4c}{ab^{-1}c^2}$;
8) $H = \dfrac{\frac{a}{c^{-1}b}}{\frac{a}{b^{-1}c}}$.

Exercice 4. Corrigé ex. 4

Exprimer sans radicaux les nombres suivants :

1) $A_1 = \sqrt{4900}$;
2) $A_2 = \sqrt{0,25}$;
3) $A_3 = \sqrt{0,0064}$;
4) $A_4 = \sqrt{\dfrac{25}{4}}$;
5) $A_5 = \sqrt{3^2 \times 5^4 \times 49}$;
6) $A_6 = \sqrt{\dfrac{8 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^3}}$;
7) $A_7 = \sqrt{\dfrac{5 \times 2^3 \times 7^4}{2 \times 5^3}}$;
8) $A_8 = \sqrt{\sqrt{16}}$;
9) $A_9 = \sqrt{5\sqrt{5}} \times \sqrt{\sqrt{5}}$.

Exercice 5. Corrigé ex. 5

Montrer que pour tout réels a, b, c, x et y on a

1) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.
2) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
3) $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.
4) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.
5) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
6) $(a+b)^3 + 2(a^3+b^3) = 3(a+b)(a^2+b^2)$.
7) $a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx) = 0$.
8) $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$.
9) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = x^4-1$.
10) $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) = x^4+1$.

Exercice 6. Corrigé ex. 6

Résoudre les équations :

$$\frac{3\,x - 10}{8} + \frac{8\,x + 4}{2} = \frac{-\,9\,x + 3}{4}$$

$$\frac{-\,2\,x - 2}{6} + \frac{-\,5\,x - 4}{9} = \frac{-\,3\,x - 1}{4}$$

Exercice 7. Corrigé ex. 7

Déterminer les racines des polynômes :

$$P\left(x\right) = -4 - 2\,x + x^2 \qquad Q\left(x\right) = -49 + 25\,x^2 \qquad R\left(x\right) = -6 - 4\,x^2$$

Exercice 8. Corrigé ex. 8

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivantes, calculer :

a) le premier terme ;
b) le terme d'indice 6 ;
c) u_3.

1) (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 9$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal à l'opposé du précédent.
2) (u_n) est la suite définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \frac{4}{5n} + 9$.
3) (u_n) est la suite définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = -9 \\ \text{Pour tout } n \geqslant 2 : u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 8. \end{cases}$$

Exercice 9. Corrigé ex. 9

1) Soit $E(x) = x^3 - 21x + 20$
   (a) Vérifier que -5 est une racine de E.
   (b) Factoriser E par $(x+5)$.
2) Soit $F(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 12$
   (a) Vérifier que F possède une racine évidente.
   (b) Factoriser F.

Exercice 10. Corrigé ex. 10

1) Étudier le signe du polynôme $P(x) = x^2 - 6x - 7$ sur $I = [0\ ;\ 5]$.
2) Étudier le signe du polynôme $P(x) = -x^2 + 2x + 4$ sur $I = [-5\ ;\ 5]$.
3) Étudier le signe du polynôme $P(x) = -x^2 + 2x - 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

Corrigé ex. 1.

1) $\alpha_1 = 10^{88}$
2) $\alpha_2 = 8^3 \times 2^3 = (2^3)^3 \times 2^3 = 2^9 \times 2^3 = 2^{12}$
3) $\alpha_3 = \dfrac{10^8}{10^2} = 10^8 \times 10^{-2} = 10^6$
4) $\alpha_4 = 4^3 \times 2^3 = 2^9$
5) $\alpha_5 = 10^{16}$
6) $\alpha_6 = 7^6$
7) $\alpha_7 = 11^{10}$
8) $\alpha_8 = 5^{15}$

Corrigé ex. 2.

1) Il y a plusieurs méthodes pour cette factorisation mais il faut absolument savoir reconnaître l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Cette identité est très souvent utilisée donc il faut bien entendu la connaître parfaitement ; la reconnaître puis l'utiliser.
$$A = 9\,x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x-2)(3x+2).$$
Remarque : l'expression initiale de A est une somme (dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires). L'expression obtenue est un produit (on effectue d'abord les opérations entre parenthèses) ; on a donc bien factorisé l'expression.
2) $B = 1 - 25y^2 = 1 - (5y)^2 = (1-5y)(1+5y)$
3) Attention au signe *moins* devant des parenthèses
$$\begin{aligned} C &= -(-9\,x-4)^2 + 36\,x^2 = 36\,x^2 - (-9\,x-4)^2 = (6x)^2 - (-9\,x-4)^2 \\ &= (6x - (-9x-4))(6x + (-9x-4)) = (15x+4)(-3x-4) \end{aligned}$$
4) Un classique : on voit de suite le facteur commun :
$$\begin{aligned} D &= (10\,x+3) \times \underbrace{(-x+6)}_{\text{fact. comm.}} - \underbrace{(-x+6)}_{\text{fact. comm.}} \times (2\,x-8) \\ &= (-x+6)\left((10\,x+3) - (2\,x-8)\right) \\ &= (-x+6)\,(8x+11) \end{aligned}$$
5) on reconnaît une identité remarquable : $E = (10x-4)^2$
6) $F = (6x+1)(8x+3)$
7) $G = 54(x+1)(3x+2)$
8) $H = (9x-1)^2$
9) $I = (6x-18)(6x-2)$

Corrigé ex. 3.

1) $A = a^4bc^3$;
2) $B = a^4b^2c^3$;
3) $C = ac$;
4) $D = abc^2$;
5) $E = a^{-1}b^3c^{-1}$;
6) $F = ac + b$;
7) $G = a^{-4}b^5c^{-1}$;
8) $H = b^{-2}c^2$.

Corrigé ex. 4. Exprimer sans radicaux les nombres suivants :

1) $A_1 = \sqrt{70^2} = 70$;
2) $A_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2^2}} = \frac{1}{2}$;
3) $A_3 = \sqrt{64 \times 10^{-4}} = \sqrt{64} \times \sqrt{10^{-4}} = 8 \times 10^{-2} = 0,08$;
4) $A_4 = \dfrac{5}{2}$;
5) $A_5 = 3 \times 5^2 \times 7$;
6) $A_6 = 2 \times 10^{-2}$;
7) $A_7 = \frac{2 \times 7^2}{5}$;
8) $A_8 = \sqrt{\sqrt{2^4}} = \sqrt{2^2} = 2$;
9) $A_9 = \sqrt{5\sqrt{5}} \times \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{5}} \times \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

Corrigé ex. 5.

1) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2+b^2)$
2) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$
3) $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.
4) $(a+b+c)^2 = a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 = a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.
5) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
6) D'après la question précédente, $(a+b)^3 + 2(a^3+b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2a^3 + 2b^3 = 3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3$.
D'autre part, en développant : $3(a+b)(a^2+b^2) = 3a^3 + 3ab^2 + 3ba^2 + 3b^3$. D'où l'égalité.
7) $a(bz-cy) + b(cx-az) + c(ay-bx) = abz - acy + bcx - abz + acy - bcx = 0$.
8) $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = ((x^2+1)+x)((x^2+1)-x) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$ (penser à la troisième identité remarquable).
9) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$ (idem).
10) $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = x^4+1$.

Corrigé ex. 6. On utilise le signe $\iff$ uniquement pour les équations qui ont exactement les mêmes solutions (ce n'est pas un signe de ponctuation).

$$\begin{aligned} \frac{3\,x-10}{8} + \frac{8\,x+4}{2} = \frac{-\,9\,x+3}{4} &\iff 3\,x - 10 + 4(8x+4) = 2(-9x+3) \quad \text{on a tout mult. par 8} \\ &\iff 53x = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

L'équation admet $x = 0$ comme seule solution.

$$\begin{aligned} \frac{-\,2\,x-2}{6} + \frac{-\,5\,x-4}{9} = \frac{-\,3\,x-1}{4} &\iff 6(-2x-2) + 4(-5x-4) = 9(-3x-1) \quad \text{en mult. par 36} \\ &\iff -5x = 19 \iff x = \frac{-19}{5} \end{aligned}$$

L'équation admet $x = \frac{-19}{5}$ comme seule solution.

Corrigé ex. 7.

— P est un polynôme de degré deux, on peut calculer son discriminant : $\Delta = 20$. On peut écrire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ (voir ex. 4).
Les deux racines de P sont alors : $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{20}}{2\times 1} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$.

— Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $Q(x) = -49 + 25\,x^2 = (5x)^2 - 7^2 = (5x-7)(5x+7)$. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc
$$Q(x) = 0 \iff \big((5x-7=0) \text{ ou } (5x+7=0)\big).$$
Q possède deux racines : $x_1 = \frac{7}{5}$ et $x_2 = -\frac{7}{5}$.
Remarque : si vous avez calculé le discriminant et trouvé $\Delta = 0$ c'est probablement que vous n'avez pas vu une identité remarquable.

— R n'admet pas de racines réelle.

Corrigé ex. 8.

1) Le premier terme est $u_0 = 9$; donné par l'énoncé.
On a $u_1 = -9$ puis $u_2 = 9$, $u_3 = -9$ ...
Le terme d'indice 6 est $u_6 = 9$ (les termes d'indice pair sont égaux à 9).

2) Le premier terme est celui de rang 1 par définition de la suite. $u_1 = \frac{4}{5} + 9 = \frac{49}{5}$.
   On trouve $u_3 = \frac{139}{15}$ et $u_6 = \frac{137}{15}$
3) Le premier terme est $u_2 = -9$ par définition. On a $u_3 = \frac{1}{4}u_2 + 8 = \frac{-9}{4} + 8 = 23/4$.
   On trouve, en itérant la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 8$, $u_6 = \frac{2711}{256}$.

Corrigé ex. 9.

1) (a) On a $E(-5) = (-5)^3 - 21 \times (-5) + 20 = -125 + 105 + 20 = 0$; (-5) est bien une racine de E.
   (b) Nous verrons que si α est une racine du polynôme P alors on peut factoriser P par $(x - \alpha)$.
   Ici, comme E est de degré 3, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E(x) = (x + 5)Q(x)$. On cherche donc trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
   Or $(x+5)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx+5ax^2+5bx+5c = ax^3+(5a+b)x^2+(5b+c)x+5c$.
   Pour que l'égalité avec E soit satisfaite pour tout $x \in \mathbf{R}$, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 5a + b &= 0 \\ 5b + c &= -21 \\ 5c &= 20 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 4 \\ b &= -5 \\ a &= 1 \end{cases}$$

   Finalement, $E(x) = (x + 5)(x^2 - 5x + 4)$.
2) (a) On commence à chercher les racines évidentes dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. On a clairement $F(-1) = 0$ donc F se factorise par $(x + 1)$.
   (b) Comme précédemment, on cherche a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $2x^3 + 7x^2 - 7x - 12 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$. Le triplet (a, b, c) doit vérifier :

$$\begin{cases} a &= 2 \\ a + b &= 7 \\ b + c &= -7 \\ c &= -12 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= -12 \\ b &= 5 \\ a &= 2 \end{cases}$$

   Ainsi $F(x) = (x + 1)(2x^2 + 5x - 12)$.
   On peut encore factoriser en cherchant les racines du polynôme $D(x) = 2x^2 + 5x - 12$. Le discriminant est $\Delta = 121$ et on trouve deux racines : $x_1 = \frac{-5-11}{4} = -4$ et $x_2 = \frac{-5+11}{4} = \frac{3}{2}$.
   D'où la factorisation : $D(x) = 2(x + 4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ (rappel : si un $P(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme de degré 2 ayant α et β comme racines, on a $P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$).
   Finalement, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = 2(x + 1)(x + 4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Corrigé ex. 10.

1) Comme à la dernière question de l'exercice précédent, on écrit $P(x) = (x + 1)(x - 7)$ (en calculant Δ par exemple). Ainsi P est de signe négatif sur $[-1, 7]$ et *a fortiori* sur $[0, 5]$.
2) Les racines du polynôme sont $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$. Or on a $4 \leqslant 5 \leqslant 9$ donc, par croissance de la fonction racine carrée : $\sqrt{4} \leqslant \sqrt{5} \leqslant \sqrt{9}$; c'est-à-dire $2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$. Finalement $3 \leqslant x_2 \leqslant 4$ et, comme $2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$ on a $-3 \leqslant -\sqrt{5} \leqslant -2$ donc $-2 \leqslant x_1 \leqslant -1$.
   Donc $-5 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 5$ donc P est positif sur $[-5, 5]$.
3) On trouve P négatif sur $\mathbf{R}$.