Travaux de vacances
– –

Exercice 1. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules une à une avec remise. On note :

— X le numéro de la première boule obtenue ;

— Y celui de la seconde.

On considère alors $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1) Montrer que la loi de V est donnée par :

$$V(\Omega) = \{1, \ldots, n\} \text{ et } \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbf{P}(V = k) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

2) Donner la loi de U.
3) Calculer $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(V)$ puis $\mathrm{Var}(U)$ et $\mathrm{Var}(V)$.
4) Déterminer une relation entre X, Y, U et V. En déduire $\mathrm{Var}(U + V)$ puis le coefficient de corrélation linéaire entre U et V.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. On considère m un nombre entier vérifiant $2 \leqslant m \leqslant n - 1$ et la variable aléatoire Z vérifiant :

$$Z = \begin{cases} X & \text{si } X > m \\ Y & \text{si } X \leqslant m \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z.

Exercice 3. On considère $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé ainsi que n un entier naturel non nul.
Soit $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire sur Ω telle que la loi de Z soit donnée par :

$$Z(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 \mid 0 \leqslant i \leqslant n \text{ et } i \leqslant j \leqslant i + n\}$$
$$\forall (i, j) \in Z(\Omega), \mathbf{P}\left(Z = (i, j)\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

1) Donner les lois de X et de Y.
2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Remarques :

Les deux premiers exercices s'intéressent à la même situation : deux variables aléatoires uniformes et indépendantes définies sur le même espace probabilisé.

Le premier exercice commence avec une situation « concrète » que l'on doit modéliser avec un couple de variables uniformes indépendantes. Pour cela, l'énoncé donne certaines indications, parfois de manière implicite. Le tirage de la première boule se fait parmi n boules donc les valeurs possibles pour X sont $\{1, \ldots, n\}$; c'est le support de X. On peut supposer que chaque valeur est équiprobable car l'urne contient une boule de chaque numéro et l'énoncé ne précise rien sur le tirage donc on peut supposer qu'il se fait de manière équiprobable. Ainsi X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

Le deuxième tirage se fait après remise de la première boule tirée. On peut donc affirmer que le support de Y est aussi $\{1, \ldots, n\}$ et comme précédemment, Y suit une loi uniforme sur cet ensemble.

On peut aussi supposer que le second tirage se fait de manière indépendante du premier ; après la remise, le numéro tiré la première fois n'influence pas le second tirage.

Dans le deuxième exercice, on peut imaginer que X et Y sont les variables X et Y données par la situation du premier énoncé et que la modéliation a déjà été faite par l'énoncé.

Les variables aléatoires U, V et Z **ne** sont **pas** des variables aléatoires uniformes : la loi de V est donnée par l'énoncé ; celle de U doit ressembler et enfin celle de Z doit dépendre de m.

L'exercice 1 est un grand classique, la méthode pour déterminer la loi de U et celle de V doit être connue.

Corrigé 1.

1) Les variables X et Y sont indépendantes et suivent des lois uniformes sur $\{1, \dots, n\}$. Le support de V est donc $V(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, la valeur 1 est atteinte lorsque X **et** Y valent toutes les deux 1 ; la valeur n est atteinte dès que X **ou** Y valent n.
Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, on commence par calculer

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(V \leqslant k) &= \mathbf{P}(\max(X,Y) \leqslant k) \\
&= \mathbf{P}\left((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)\right) && \text{on a l'égalité ensembliste : } (\max(X,Y)\leqslant k) = ((X\leqslant k)\cap(Y\leqslant k)) \\
&= \mathbf{P}(X \leqslant k) \times \mathbf{P}(Y \leqslant k) && \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} && X \text{ et } Y \text{ suivent une loi uniforme} \\
&= \frac{k^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

On termine en remarquant que pour $k > 1$, l'on a égalité ensembliste :

$$(V = k) = (V \leqslant k) \setminus (V \leqslant k-1) = (V \leqslant k) \cap \overline{(V \leqslant k-1)}.$$

Comme $(V \leqslant k-1) \subset (V \leqslant k)$, on a, pour tout $k > 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(V = k) &= \mathbf{P}(V \leqslant k) - \mathbf{P}(V \leqslant k-1) \\
&= \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \\
&= \frac{2k-1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on a $\mathbf{P}(V = 1) = \mathbf{P}(V \leqslant 1) = \frac{1}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$. D'où le résultat.

2) Le support de U est donc $U(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, la valeur 1 est atteinte lorsque X **ou** Y valent 1 ; la valeur n est atteinte dès que X **et** Y valent n.
Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on commence par calculer

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U > k) &= \mathbf{P}(\min(X,Y) > k) \\
&= \mathbf{P}\left((X > k) \cap (Y > k)\right) && \text{on a l'égalité ensembliste : } (\min(X,Y)>k) = ((X>k)\cap(Y>k)) \\
&= \mathbf{P}(X > k) \times \mathbf{P}(Y > k) && \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \frac{n-(k+1)+1}{n} \times \frac{n-(k+1)+1}{n} && X \text{ et } Y \text{ suivent une loi uniforme}^{(a)} \\
&= \frac{(n-k)^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

La valeur de $\mathbf{P}(U = n) = \mathbf{P}((X = n) \cap (Y = n)) = \mathbf{P}(X = n) \times \mathbf{P}(Y = n) = \frac{1}{n^2}$.
Pour tout $k > 1$, on a l'égalité $(U = k) = (U > k-1) \setminus (U > k) = (U > k-1) \cap \overline{(U > k)}$ et on remarque que cette égalité reste vraie pour $k = 1$.
Ainsi, comme $(U > k) \subset (U > k-1)$, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U = k) &= \mathbf{P}(U > k-1) - \mathbf{P}(U > k) \\
&= \frac{(n-k-1))^2}{n^2} - \frac{(n-k)^2}{n^2} \\
&= \frac{2(n-k)+1}{n^2}
\end{aligned}$$

Cette formule restant vraie pour $k = n$, on peut écrire que la loi de U est donnée par

$$U(\Omega) = \{1, \dots, n\} \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathbf{P}(U = k) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}\,^{(b)}.$$

3) On remarque que X et Y ont, d'après le cours, une espérance et une variance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = \frac{n^2-1}{12}.$$

(a). On pouvait ici exploiter le fait que : $\mathbf{P}(X > k) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant k)$.
(b). Vérifier que la somme des probas vaut 1

Comme U et V ont un support fini, elles admettent une espérance et une variance. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(U=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{2(n-k)+1}{n^2}\\
&= \frac{1}{n^2}\left[2n\sum_{k=1}^{n} k - 2\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + \sum_{k=1}^{n} k\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[2n \times \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(V=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{2k-1}{n^2}\\
&= \frac{1}{n^2}\left[2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}
\end{aligned}$$

Remarque : Afin de vérifier la cohérence des calculs, on peut faire le raisonnement suivant. On a $X+Y=U+V$ (pourquoi ?) ainsi par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(U)+\mathbb{E}(V)$. Or $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{n+1}{2}$ donc on doit trouver $\mathbb{E}(U)+\mathbb{E}(V)=n+1$.

On trouve $E(V^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbf{P}(V=k)=\frac{3n^3+4n^2-1}{6n}$. Ainsi

$$\mathrm{Var}(V)=\mathbb{E}(V^2)-\mathbb{E}(V)^2=\frac{3n^3+4n^2-1}{6n}-\left(\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right)^2=\frac{2n^4+n^2-1}{36n^2}=\frac{(n^2+1)(2n^2-1)}{36n^2}.$$

De même, on trouve $\mathrm{Var}(U)=\frac{(2n^2+1)(n^2-1)}{36n^2}$.

4) On a $X+Y=U+V$ car la somme des numéros des deux boules est égale à la somme du plus petit et du plus grand nombre.
Ainsi, comme X et Y sont indépendantes, on a $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)=\frac{n^2-1}{6}$. Finalement $\mathrm{Var}(U+V)=\frac{n^2-1}{6}$.
D'autre part, $\mathrm{Var}(U+V)=\mathrm{Var}(U)+\mathrm{Var}(V)+2\,\mathrm{Cov}(U,V)$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Cov}(U,V) &= \frac{n^2-1}{6}-\frac{(2n^2+1)(n^2-1)}{36n^2}-\frac{(n^2+1)(2n^2-1)}{36n^2}\\
\text{Donc }\ \mathrm{Cov}(U,V) &= \frac{n^4-3n^2+1}{36n^2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\rho(U,V)=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}=2\frac{(n^2+n-1)(n^2-n-1)}{\sqrt{4n^8-5n^4+1}}.$$

Corrigé 2.

On considère un nombre m vérifiant $2 \leqslant m \leqslant n-1$.

Le support de Z est $\{1,\dots,n\}$ (par exemple, $Z=1$ est réalisé si $Y=1$ (car on a nécessairement $Y \leqslant m$) ; $Z=n$ est réalisé si $X=m$.

Comme Z dépend en premier lieu de la valeur de X, nous allons considérer le système complet d'évènements composé de $A=(X>m)$ et $B=(X \leqslant m)=\overline{X>m}=\overline{A}$.

Comme X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, on a les résultats suivants :

$$\mathbf{P}(X > m) = \frac{n-m}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \leqslant m) = \frac{m}{n}.$$

D'autre part, la formule des probabilités totales associée à ce système complet d'évènements permet d'écrire, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}(Z = k \mid X > m)\mathbf{P}(X > m) + \mathbf{P}(Z = k \mid X \leqslant m)\mathbf{P}(X \leqslant m) \\
&= \mathbf{P}(X = k \mid X > m)\mathbf{P}(X > m) + \mathbf{P}(Y = k \mid X \leqslant m)\mathbf{P}(X \leqslant m) \\
&= \frac{\mathbf{P}((X = k) \cap (X > m))}{\mathbf{P}(X > m)}\mathbf{P}(X > m) + \frac{\mathbf{P}((Y = k) \cap (X \leqslant m))}{\mathbf{P}(X \leqslant m)}\mathbf{P}(X \leqslant m) \\
&= \mathbf{P}((X = k) \cap (X > m)) + \mathbf{P}((Y = k) \cap (X \leqslant m)) \\
&= \begin{cases} 0 + \dfrac{1}{n} \times \dfrac{m}{n} & \text{si } k \leqslant m \\ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \times \dfrac{m}{n} & \text{si } k > m \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{m}{n^2} & \text{si } k \leqslant m \\ \dfrac{n+m}{n^2} & \text{si } k > m \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi la loi de Z est donnée par

$$Z(\Omega) = \{1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},\ \mathbf{P}(Z = k) = \begin{cases} \dfrac{m}{n^2} & \text{si } k \leqslant m \\ \dfrac{n+m}{n^2} & \text{si } k > m \end{cases}$$

Remarque : vérifier que $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Z = k) = 1$.

Corrigé 3.
Avec $\alpha = \frac{1}{(n+1)^2}$, on a $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{n+1}$ et le tableau :

(i,j)	0	1	2	$\dots$	$n-1$	n	$n+1$	$\dots$	$2n$	$\mathbf{P}(X = i)$
0	α	α	α	$\dots$	α	α	0	$\dots$	0	$\sqrt{\alpha}$
1	0	α	α	$\dots$	α	α	α		0	$\sqrt{\alpha}$
2	0	0	α	$\dots$	α	α	α		0	$\sqrt{\alpha}$
$\vdots$				$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$				$\ddots$	α	$\ddots$	$\ddots$		0	$\vdots$
n	0	0	0	$\dots$	0	α	α	$\dots$	α	$\sqrt{\alpha}$
$\mathbf{P}(Y = j)$	α	2α	3α	$\dots$	$n\alpha$	$(n+1)\alpha$	$n\alpha$	$\dots$	α	1

En effet, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $\displaystyle\bigsqcup_{j \in \{0, \dots, 2n\}} (Z = j)$ est un système complet d'évènements.