Travaux de vacances – –

Exercice 1. Oral T.S.E. 2024 pl.1 avec préparation Corrigé ex. 1

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$. On souhaite étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,x]$
$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}$$
2) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
3) Justifier que pour tout $x \in [0,1[$,
$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$
4) En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
5) En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$
6) Déterminer la nature de la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$
7) Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Exercice 2. Oral T.S.E. 2024 pl.1 sans préparation Corrigé ex. 2

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère
$$M := \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}$$
   (a) Pour quelles valeurs de x et de y la matrice M est-elle inversible ?
   (b) Pour quelles valeurs de x et de y la matrice M est-elle diagonalisable ?
2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p. On considère la matrice aléatoire suivante :
$$A := \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$
   (a) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?
   (b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 3. Oral T.S.E. 2024 pl.6 avec préparation Corrigé ex. 3

On considère l'application

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x-y, x+3y). \end{array}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer A, la représentation matricielle de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que 2 est valeur propre de A.
4) La matrice A est-elle diagonalisable ?
5) Soit $\mathcal{F} := \{(-1,1),(1,0)\}$. Déterminer T, la représentation matricielle de f relativement à la base $\mathcal{F}$.
6) Soit P la représentation matricielle de $\mathcal{F}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer P^{-1}.
7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer T^n en fonction de n.
8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n en fonction de n.
9) Déterminer $f^{10}(1,1)$.

Exercice 4. Oral T.S.E. 2024 pl.6 sans préparation Corrigé ex. 4

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2.
On pose $Y := \mathrm{e}^X$.

1) Déterminer et tracer la fonction de répartition de X.
2) Calculer et tracer la fonction de répartition de Y.
3) Montrer que Y est à densité et déterminer une densité de Y.
4) Calculer $\mathbb{P}(Y=1)$.
5) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq 1/2)$.
6) Calculer $\mathbb{P}(2 \leq Y \leq 5)$.
7) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 5. Oral T.S.E. 2024 pl.8 avec préparation Corrigé ex. 5

On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 2y_n + 4z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 2y_n + 3z_n \end{cases}$$

les réels x_0, y_0 et z_0 étant donnés.

1) Écrire le système sous forme matricielle $V_{n+1} = AV_n$ où

$$V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

2) Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ est A.
3) Montrer que $V_n = A^n V_0$, pour tout $n \geq 1$.
4) On considère la famille $\mathcal{E} := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
5) Déterminer M, la représentation matricielle de f dans la base $\mathcal{E}$.
6) Pour tout $n \geq 1$, calculer M^n.
7) En déduire A^n, pour tout $n \geq 1$.
8) Pour tout $n \geq 1$, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 6. **Oral TSE 2024 pl. 10 sans préparation** Corrigé ex. 6

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 2 .

1) Montrer que la famille $\{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$ est liée.
2) Peut-on toujours extraire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la famille $\{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$?
3) Montrer que si $I_2 \in \text{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$, alors A est inversible.
4) Soit A non inversible. Peut-on affirmer que $I_2 \notin \text{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$?
5) On suppose ici $I_2 \notin \text{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$.
   (a) Justifier que la famille $\{A, A^2, A^3, A^4\}$ est liée.
   (b) En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 7. Corrigé ex. 7

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ on a donc :

$$\langle x, y\rangle = X^{\intercal} Y$$

où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, $F^{\perp}$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbf{R}^3$
On note $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbf{R}^3$.
Pour f endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note $f^{\star}$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M^{\intercal}$.

Partie I : Quelques propriétés de $f^{\star}$.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^3)^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^{\star}(y)\rangle$$
2) Montrer que $f^{\star}$ est le seul endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ vérifiant
$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^3)^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$
3) Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).
   (a) Pour $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$, calculer $\langle x, f^{\star}(y)\rangle$.
   (b) En déduire que $F^{\perp}$ est stable par $f^{\star}$.

Partie II : Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

4) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
5) Montrer que pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, $f_u^{\star}$ appartient à $\mathcal{E}$.
6) On note $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$, $\quad e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $\quad e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.
   (a) Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.
   (b) En déduire que, pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.
   (c) Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, $\mathcal{D}^{\perp}$ est stable par f_u.
   (d) Déterminer une équation de $\mathcal{D}^{\perp}$.
   (e) Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^{\perp}$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$.
   (f) Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme
$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$$
   où e, f, g, h, ℓ sont des réels.

Exercice 8. Corrigé ex. 8

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)$-ième l'autre côté.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.
On définit de même les séries suivantes.
Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.
Pour $i \in \mathbf{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ième lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.
Les trois parties sont indépendantes.

Partie I : Étude des longueurs de séries.

1) On note L_1 la longueur de la première série.
Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + 1$.
En déduire que
$$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$$
Vérifier que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$$

2) On note L_2 la longueur de la deuxième série.

(a) Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.

(b) En déduire que, pour $k \in \mathbf{N}^*$,

$$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$$

On admet que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$$

(c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

Partie II : Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \dfrac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :

— La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;

— La dernière série se termine nécessairement au n-ième lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPPFFPPP…(F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2;$$

$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3) Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

4) Dans le cas général où $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

5) **Fonctions génératrices de N_n.**
On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k$$

(a) Pour $s \in [0, 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

(b) Que représente $G_n'(1)$?

(c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in 1, \ldots, n$ on a

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k - 1) \cap F_{n-1})$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k - 1) \cap P_{n-1})$$

Montrer alors que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k - 1)$$

(d) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1 + s}{2} G_{n-1}(s)$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1 + s}{2}\right)^{n-1} s$$

(e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

Partie III : Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

6) Montrer que pour tout réel x on a

$$1 - x \leqslant e^{-x}$$

7) On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge. Soit $k \in \mathbf{N}^*$ fixé. Pour $n \geqslant k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leqslant i \leqslant n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n$$

(a) Justifier que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$$

(b) Montrer que

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$$

puis, en utilisant **III.1**, que

$$P(C_n) \geqslant 1 - \exp(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i))$$

En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1$$

(c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i) \text{ ?}$$

(d) Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i) = 1$$

8) En considérant les événements A_n « on obtient Pile au $(2n)$-ième et au $(2n+1)$-ième lancers», montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs, après n'importe quel lancer, vaut 1.

Corrigé ex. 1.
Oral T.S.E., corrigé par T.S.E.

1) Il s'agit d'une somme de suite géométrique de raison t. Puisque $t \leqslant x$ et que $x < 1$, on en déduit que $t < 1$, ce qui nous permet d'écrire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, x], \quad \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$. En intégrant sur $[0, x]$, le terme de gauche on obtient, par linéarité de l'intégrale
$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n} t^k \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$
En intégrant sur $[0, x]$, le terme de droite on obtient
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \, \mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \, \mathrm{d}t$$

3) Soit $t \in [0, x]$. On a :
$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}}{1-x}$$
En intégrant on obtient
$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{n+1} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$
Et comme $x \leq 1$:
$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2}$$

4) Par le théorème d'encadrement,
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \, \mathrm{d}t = 0$$

5) D'après les deux questions précédentes,
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \, \mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

6) En posant $j = k+1$ on obtient
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x^j}{j} = -\ln(1-x)$$
Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge lorsque $x \in [0, 1[$ et l'on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} \right) = -\ln(1-x).$$

7) En choisissant $x = 1/2$ dans la somme précédente, on obtient :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

Corrigé ex. 2.
Oral T.S.E., corrigé par T.S.E.

1) (a) La matrice M est triangulaire supérieure donc elle est inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

(b) Si $x \neq y$, la matrice a deux valeurs propres distinctes x et y donc elle est diagonalisable. Si $x = y$, la matrice a une unique valeur propre et est donc diagonalisable si et seulement si elle est déjà diagonale, c'est-à-dire si $x + y = 0$.

2) (a) Notons Z l'évènement « A est inversible». Par indépendance de X et Y on a :
$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}((X \neq 0) \cap (Y \neq 0)) = \mathbb{P}(X \neq 0)\mathbb{P}(Y \neq 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = p^2$$

(b) Notons T l'événement « A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ˇ. On a
$$T = \underbrace{\{X \neq Y\}}_{\text{Deux valeurs propres distinctes}} \cup \underbrace{(\{X = Y\} \cap \{X + Y = 0\})}_{\text{une seule valeur propre mais déjà diagonale}}$$
Or $\{X \neq Y\} = \{(X = 0) \cap (Y = 1)\} \cup \{(X = 1) \cap (Y = 0)\}$ donc
$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0))$$
Par indépendance de X et Y on obtient
$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 2p(1-p)$$
De même
$$\{X = Y\} \cap \{X + Y = 0\} = \{X = 0\} \cap \{Y = 0\}$$
Donc par indépendance
$$\mathbb{P}((X = Y) \cap (X + Y = 0)) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = p^2$$
Finalement on a
$$\mathbb{P}(T) = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

Question supplémentaire : Établir la loi du rang de A.
Soit R le rang de A. On a $R(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. De plus

— $R = 0$ si $A = 0$ c'est-à-dire si $X = Y = 0$. Donc
$$\mathbb{P}(R = 0) = \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) = (1-p)^2$$

— $R = 2$ si A est inversible. On a vu que $\mathbb{P}(R = 2) = p^2$.

— En conséquence $\mathbb{P}(R = 1) = 1 - \mathbb{P}(R = 0) - \mathbb{P}(R = 2) = 1 - (1-p)^2 - p^2 = 2p(1-p)$.

Corrigé ex. 3.
Oral T.S.E., corrigé par T.S.E.

1) f est "isomorphe" à $X \mapsto AX$ où
$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2) On a
$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3) On a
$$\binom{x}{y} \in \operatorname{Ker}(A-2I) \Leftrightarrow x = -y$$
Donc $\{(1,-1)\}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

4) On calcule $\det(A-\lambda I) = (\lambda-2)^2$. Donc la seule valeur propre est 2. Donc si A était diagonalisable on aurait $A = P(2I)P^{-1} = 2I$. Donc A n'est pas diagonalisable.

5) On a
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6) On a
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7) On pose
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On a $T = 2I + N.2I$ et N commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton on a
$$T^n = (2I+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k = 2^n I + 2^{n-1} nN = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

8) On a
$$A^n = PT^nP^{-1} = 2^{n-1}PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

9) On calcule
$$A^{(10)} = \begin{pmatrix} 2^{10} - 10.2^9 & -10.2^9 \\ 10.2^9 & 2^{10} + 10.2^9 \end{pmatrix} = 2^{10} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
D'où
$$A^{(10)}(1,1) = 2^{10} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \binom{1}{1} = 2^{10} \binom{-9}{11}$$

Corrigé ex. 4.
Oral T.S.E., corrigé par T.S.E.

1) On a $F_X(x) = \left(1 - e^{-2x}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Sa représentation graphique est

2) On a
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(e^X \leq y\right) = \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) = F_X(\ln(y)) = \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(y)$$
Sa représentation graphique est

3) F_Y est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc Y est à densité. De plus la loi de densité est donnée par
$$f_Y(y) = \frac{2}{y^3} \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(y)$$

4) On a $\mathbb{P}(Y = 1) = 0$.

5) On a $\mathbb{P}(Y \leq 1/2) = 0$.

6) On a
$$\mathbb{P}(2 \leq Y \leq 5) = F_Y(5) - F_Y(2) = \frac{24}{25} - \frac{3}{4} = \frac{21}{100}$$

7) On a
$$E(Y) = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{2}{y^2} \, \mathrm{d}y = 2$$

Corrigé ex. 5.
Oral TSE, corrigé par TSE.

1)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{array}{rcl} f: & & \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 3x - 2y + 4z \\ 2x - 2y + 3z \end{pmatrix} \end{array}$$

3) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$V_n = A^n V_0$".
$\mathcal{P}(1)$ est vraie
Supposons $\mathcal{P}$ vraie à un certain rang n. Alors
$$V_{n+1} = Av_n = AA^nV_0 = A^{n+1}V_0$$
Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire et $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
Remarque : si besoin, entraînez-vous à rédiger cette récurrence « correctement ».

4) On considère la matrice associée à la famille :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sa réduite de Gauss est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a 3 pivots non-nuls. La famille est donc une famille de 3 vecteurs qui forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$ elle est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : la « réduite de Gauss » n'est pas au programme, vous pouvez bien entendu utiliser les termes appris au cours de l'année de HK !

5) On a

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Soit

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $M = I + N$. On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et pour tout $k \geq 3, N^k = 0$.
Les matrices I et N commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \geq 1$,

$$M^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) On a $M = P^{-1}AP$ avec

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+n^2 & -n^2 & n+n^2 \\ 2n+n^2 & 1-2n-n^2 & 3n+n^2 \\ 2n & -2n & 2n+1 \end{pmatrix}$$

8) On a donc

$$\begin{cases} x_n = \left(1+n^2\right)x_0 - n^2 y_0 + \left(n+n^2\right)z_0 \\ y_n = \left(2n+n^2\right)x_0 + \left(1-2n-n^2\right)y_0 + \left(3n+n^2\right)z_0 \\ z_n = 2nx_0 - 2ny_0 + (2n+1)z_0 \end{cases}$$

Corrigé ex. 6.

1) Le cardinal de la famille est strictement supérieur à la dimension de l'espace vectoriel : la famille est donc liée.
2) Non, par exemple lorsque $I_2 = A$. On peut aussi penser aux symétries, aux rotations d'angle $\pi/4$ etc.
3) Il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $I_2 = aA + bA^2 + cA^3 + dA^4$. Par conséquent, $I_2 = A\left(aI_2 + bA + cA^2 + dA^3\right)$. D'où A inversible, d'inverse $aI_2 + bA + cA^2 + dA^3$.
4) Cette question est la contraposée de la question précédente. Elle est donc vraie.
5) (a) Puisque $I_2 \notin \operatorname{Vect}\left(A, A^2, A^3, A^4\right)$, le rang de la famille $\left\{A, A^2, A^3, A^4\right\}$ est inférieur ou égal à 3. Autrement dit, la famille est liée.
   (b) Supposons A inversible. Comme la famille $\left\{A, A^2, A^3, A^4\right\}$ est liée, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4/\{(0,0,0,0)\}$ tel que $aA + bA^2 + cA^3 + dA^4 = 0$. On a donc $A\left(aI_2 + bA + cA^2 + dA^3\right) = 0$. En multipliant à gauche par A^{-1}, il vient $aI_2 + bA + cA^2 + dA^3 = 0$. a est nécessairement nul, sans quoi on aurait $I_2 \in \operatorname{Vect}\left(A, A^2, A^3, A^4\right)$. Il vient $bA + cA^2 + dA^3 = 0$. En réitérant, (ou en appliquant la même méthode) on obtient $b = 0$, puis $c = 0$ et enfin $d = 0$ ou une absurdité. On a ainsi montré par l'absurde que A n'est pas inversible.