Travaux de vacances
– 2 –

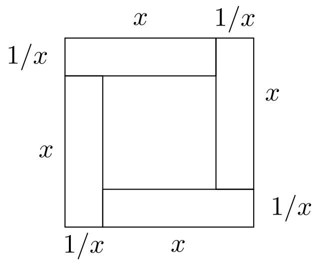
Ces exercices seront revus lors des chapitres correspondants, en début d'année.

Exercice 1. L'objectif de cet exercice est de démontrer de plusieurs façons différentes l'énoncé suivant :

$$\text{pour tout nombre réel } x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Plus que d'obtenir le résultat, le but est de réviser les différentes techniques possibles.

1) **Première méthode :**
   Soit $x > 0$, calculer $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ et remarquer qu'un nombre élevé au carré est toujours positif.
2) **Deuxième méthode :** on construit le carré ci-dessous en agençant 4 rectangles de côtés x et $1/x$.



   (a) Remarquer que la construction ci-dessus est toujours possible et que le « petit » carré situé à l'intérieur « existe » ou est réduit à un point.
   (b) Calculer l'aire du « grand » carré de deux façons : à l'aide de la longueur d'un côté puis en découpant le grand carré en 4 rectangles et le petit carré.
   (c) Conclure.
3) **Troisième méthode :** résoudre l'inéquation, pour $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

4) **Quatrième méthode :** étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

Exercice 2.
Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \text{ ; pour tout n} \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 (donner les valeurs exactes) ;
2) montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{u_n}{n}$ est une suite géométrique.
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3. À l'issue d'une guerre heureuse, un roi décida de répartir entre ses meilleurs officiers l'immense butin de pièces d'or qu'il avait conquis.

Dans la plus grande salle de son palais, les pièces furent réparties en tas.

Le premier tas se réduisait à une pièce, le second en comptait 3, le troisième 5 et ainsi de suite en suivant la série des nombres impairs. Le nombre de pièces se prêta à cette répartition.

Les officiers furent ensuite disposés par ordre de mérite croissant : le moins méritant prit le premier tas (une seule pièce), le second les deux tas suivants, le troisième les trois tas suivants et ainsi de suite. Le nombre de tas étant tel que tous les officiers jusqu'au dernier purent se servir selon cette règle et il ne resta rien.

Sachant que le butin se composait de 25 502 500 pièces d'or, combien d'officiers bénéficient de la répartition ?

Exercice 4.

Le problème a pour objet l'étude et la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$ et on rappelle : $\mathrm{e} \approx 2,718$.

1) *Étude d'une fonction auxilliaire.*

   Soit g la fonction définie sur $]0;1]$ par

$$g(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x.$$

   (a) Montrer que la fonction g est strictement croissante.
   Dresser son tableau de variations en précisant la limite en 0 et la valeur en 1.

   (b) En déduire que la fonction g s'annule pour un unique réel β compris entre 0 et 1.

   (c) Démontrer que $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{4}$.

2) *Étude et représentation graphique de f.*

   (a) Étudier la limite de f en 0. Montrer que f est continue en 0.

   (b) i. Étudier la dérivabilité de f en 0.

   ii. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ et $-g(x)$ ont le même signe.

   (c) Dresser le tableau de variations de f.

   (d) Tracer la courbe représentative de f en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Corrigé ex. 1.

1) Pour tout $x > 0$, on a $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$ car un carré est toujours positif. D'autre part, en développant ce carré, on a :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 &= \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \times \sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\ &= x - 2 + \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x > 0$, $x - 2 + \frac{1}{x} \geqslant 0$ donc pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

2) (a) Cette question comporte un « piège » : il faut distinguer les cas $x > \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{x}$ et $x < \frac{1}{x}$; alors que la figure ne laisse voir que le premier cas.
En particulier, si $x = \frac{1}{x}$, on a $x = 1$ et le « petit carré » est en fait le point « central ». Son aire est donc nulle.
Si $x > \frac{1}{x}$ (*i.e.* $x > 1$), le carré intérieur est de côté $x - \frac{1}{x}$; son aire est donc $\mathscr{A}_1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.
Si $x < \frac{1}{x}$ (*i.e.* $x < 1$), le carré intérieur est de côté $\frac{1}{x} - x$; son aire est donc $\mathscr{A}_1 = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.
Dans les trois cas, l'aire du carré intérieur est $\mathscr{A}_1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.

(b) Le grand carré est un carré de côté $x + \frac{1}{x}$ donc son aire est $\mathscr{A}_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.
On peut aussi calculer l'aire du grand carré en sommant l'aire du carré de la question précédente avec l'aire des 4 rectangles (de côtés x et $1/x$) :

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 + 4 \times x \times \frac{1}{x} = \mathscr{A}_1 + 4.$$

(c) On déduit que, comme l'aire du petit carré est positive (c'est une aire), on a

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 + 4 \geqslant 4.$$

Finalement, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geqslant 4$ donc, comme tous les nombres sont positifs, on peut prendre la racine et obtenir : $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

3) Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geqslant 2 &\iff x + \frac{1}{x} - 2 \geqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc pour tout $x > 0$, on a $\frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$ donc $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

4) On considère f définie sur $]0, +\infty[$ par $f \colon x \mapsto x + \frac{1}{x}$; f est dérivable et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
On obtient alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum sur l'intervalle $]0, +\infty[$, atteint en $x = 1$ et valant $f(1) = 2$. Donc pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 2$; c'est-à-dire $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Corrigé ex. 2.

1) $u_2 = \frac{2}{9}$, $u_3 = \frac{1}{9}$, $u_4 = \frac{4}{81}$, et $u_5 = \frac{5}{243}$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \frac{u_n}{3n} = \frac{\frac{u_n}{n}}{3} = \frac{v_n}{3}.$$
Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{3}$.

3) On a donc $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ donc $u_n = \frac{n}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Corrigé ex. 3. On trouve 100 officiers.

Soit m le nombre de tas de pièces d'or ; on a $1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) = 25\,502\,500$. On peut écrire
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} 1 = 2\frac{m(m+1)}{2} - m = m^2.$$
Ainsi il y a $m = 5\,050$ tas de pièces.

Soit n le nombre d'officiers, on a d'après l'énoncé :
$$\sum_{i=1}^{n} i = 5050.$$
On trouve que n est solution de l'équation
$$n^2 + n - 10100 = 0.$$
Il y a donc 100 officiers.

Corrigé ex. 4.

1) (a) La fonction g est dérivable sur $]0; 1]$ comme somme de fonctions dérivables. On a $g'(x) = \frac{2}{(2+x)^2} + \frac{1}{x}$.
Comme $x > 0$, on a $g' > 0$ sur $]0, 1]$ et g strictement croissante.
Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2}$, on a $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$. On trouve aussi, $\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{2}{3}$.

x	0		β	1
$g'(x)$	$\Vert$		$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{2}{3}$

(b) La fonction g est continue sur $]0; 1]$, elle admet 0 comme valeur intermédiaire sur cet intervalle (voir tableau de variation) donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta \in]0, 1]$ tel que $g(\beta) = 0$. Comme g est strictement monotone, ce β est unique.

(c) On calcule $g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{5} + \ln(\frac{1}{2}) = 0,6 - \ln 2 < 0$ d'après l'approximation rappelée en début d'énoncé. Comme g est strictement croissante, $\frac{1}{2} < \beta$.
De même, $g(\frac{3}{4}) = \frac{7}{11} + \ln(\frac{3}{4}) = \frac{7}{11} + \ln(3) - \ln(4) = \frac{7}{11} + \ln(3) - 2\ln(2)$. Comme $e < 3$, on a $1 < \ln(3)$. Comme $0,6 < \ln(2) < 0,7$, on a $-1,4 < -2\ln(2)$ donc $-0,4 < \ln(3) - 2\ln(2)$ et finalement $0 < \frac{7}{11} + \ln(3) - 2\ln(2) = g(\frac{3}{4})$. Comme g est strictement croissante, $\beta < \frac{3}{4}$.
En combinant les deux inégalités on obtient : $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{4}$.

2) (a) On a $\lim_{x\to 0} 1 + x = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Comme $f(0) = 0$, f est continue (à droite) en 0.

(b) i. On regarde le taux d'accroissement de f en 0 : soit $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-x^2\ln(x)}{x(x+1)} = \frac{-x\ln(x)}{x+1}$.
Ainsi, par croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

ii. Soit $x > 0$, f est dérivable en x comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
On calcule dans un premier temps la dérivée de $u\colon x \longmapsto x^2\ln(x)$; d'après la formule de Leibniz, on trouve $u'(x) = 2x\ln x + \frac{x^2}{x} = 2x\ln x + x$.
Finalement, $f'(x) = \frac{-u'(x)(x+1)+u(x)}{(x+1)^2} = \frac{-(2x\ln(x)+x)(x+1)+x^2\ln(x)}{(x+1)^2} = -\frac{x(x\ln(x)+2\ln(x)+x+1)}{(x+1)^2}$.
Comme $x > 0$, f' est du signe opposé à $x\ln(x) + 2\ln(x) + x + 1$.
Or pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x = \frac{1+x+x\ln x+2\ln x}{2+x}$. Ainsi pour tout $x > 0$, $f'(x)$ et $-g(x)$ ont le même signe.

(c) On calcule $f(1) = 0$ et comme $g(\beta) = 0$, on en déduit $\ln(\beta) = -\frac{1+\beta}{2+\beta}$ donc $f(\beta) = \frac{\beta^2}{2+\beta}$. D'où le tableau :

x	0		β		1
$f'(x)$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\beta^2}{2+\beta}$	$\searrow$	0

(d)