TRAVAUX DE VACANCES

Exercice 1. (HEC 2019)

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle *croissante* qui converge vers un réel ℓ.

   Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

   On veut montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge également vers ℓ.

   (a) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(n\ a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

   (b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

   (c) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leqslant \ell$.

   (d) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'inégalité : $b_{2n} \geqslant \dfrac{b_n + a_n}{2}$.

   (e) Déduire des deux questions précédentes que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ.

2) Montrer que le résultat précédent reste valide si l'on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est *décroissante*.

On admet que le résultat trouvé dans les questions 1 et 2 reste valide si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est pas monotone.

On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}.$$

3) (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) *On rappelle que deux suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont dites* équivalentes *lorsque n tend vers $+\infty$, s'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui converge vers 1 et qui vérifie, à partir d'un certain rang, $v_n = t_n \times u_n$.*
   On dit alors que v_n est équivalent *à w_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
   Soit β un réel non nul.

   (a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} = \left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^{\beta} - 1\right) \times u_n^{\beta}.$$

   (b) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction qui à x associe $(1+x)^{\beta}$, déterminer un équivalent de $\left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^{\beta} - 1\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (c) Montrer que la suite $(u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta})_{n\in\mathbf{N}^*}$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\beta = 3$.

5) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $a_n = u_{n+1}^3 - u_n^3$.
   En utilisant le résultat admis au terme de la question 2, montrer que u_n est équivalent à $\sqrt[3]{3n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. d'après ENSAE 2019

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, différent de l'endomorphisme nul et tel que $f^2 = 0$ (on rappelle que dans ce contexte, $f^2 = f \circ f$).

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$; en déduire leurs dimensions.
2) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^3$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
3) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre.
4) En déduire une base de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Question supplémentaire :

5) Soit f un endomorphisme de E ; montrer que $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ et que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x.$$

1) On considère la fonction $f\colon x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ (on pourra distinguer le cas $x \geqslant 0$ et le cas $x < 0$).
   (b) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (c) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
   (d) Dresser le tableau de variations de f en le complétant avec les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (e) Montrer que f est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbf{R}$ et calculer I_0.
2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a la relation de récurrence :

$$nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}.$$

3) En déduire I_2 et I_3.
4) (a) Démontrer que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
   (b) Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$,

$$2nI_n \leqslant \sqrt{2} + I_n.$$

   On pourra montrer dans un premier temps que pour tout $n \geqslant 2$, $I_n \leqslant I_{n-2}$.
   (c) Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{\sqrt{2}n}{n+1} \leqslant 2nI_n.$$

   (d) Déduire des deux dernières inégalités que $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{2}\, I_n = 1$.

Exercice 4. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de 1/2. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 5. On lance 3 dés parfaits. Montrer que la probabilité pour que la somme des points amenés dépasse dix est égale à la probabilité que cette somme ne dépasse pas dix.

Exercice 1. *Indications :*

1) (a) Un calcul pas si simple mais qui peut être admis temporairement (il faut toutefois savoir mener ce genre de calculs, surtout en devoir de vacances où la pression du concours est absente). Rappels : bd est un dénominateur commun à $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. D'autre part, $\frac{a}{b} = \frac{1}{a} \times b$.
   (b) utiliser le fait que (a_n) est supposée croissante donc pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $a_{n+1} \geqslant a_k$. En particulier on peut sommer ces n inégalités.
   (c) Comme (b_n) croît, il serait commode de montrer qu'elle est majorée afin d'obtenir la convergence. Pour cela on peut utiliser le fait que (a_n) est croissante et convergente ; elle est donc majorée (par sa limite par exemple).
   (d) question plus difficile, commencer par étudier le côté droit de l'inégalité.
   (e) Faisable même si on n'a pas réussi les questions précédentes.
2) on peut considérer la suite $(\tilde{a}_n)$ définie pour tout n par $\tilde{a}_n = -a_n$.
3) (a) Il faut prouver que la suite (u_n) ne s'annule jamais ; il est plus commode de prouver (par récurrence) que la suite (u_n) est strictement positive.
   (b) question facile.
   (c) Question plus délicate : c'est une suite définie par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et on vient de prouver que cette suite est croissante. Ainsi soit la suite converge, soit elle diverge vers $+\infty$ (cours à connaître). On peut donc essayer un raisonnement par l'absurde en supposant qu'elle converge. On peut enfin montrer que la fonction f n'admet pas de point fixe.
4) (a) question technique : ne pas oublier les règles de calcul avec les puissances.
   (b) On remarque que (u_n) diverge vers $+\infty$ donc $\frac{1}{u_n^3}$ converge vers 0. Enfin $(1+x)^\beta = 1 + \beta x + x\varepsilon(x)$ donc si (w_n) converge vers 0, (w_n) est équivalente à βw_n (à prouver).
   (c) Penser à la forme exponentielle : pour tout $a > 0$, $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.
5) voir le corrigé à venir.

Exercice 2. *Indications :*

1) Dans ce genre d'exercice, il faut écrire les choses :
   — Comment montrer que $A \subset B$? Il faut montrer que tout élément de A est dans B : $\forall a \in A, a \in B$. Pour démontrer une telle propriété universelle (« pour tout a »), on commence par : soit $a \in A$. Il faut alor démontrer que a appartient à B.
   — Écrire la définition de $\mathrm{Im} f$:
   $$\mathrm{Im} f = \{\underline{\qquad} \in \underline{\qquad} \mid \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\}$$
   — Écrire la définition de $\mathrm{Ker} f$:
   $$\mathrm{Ker} f = \{\underline{\qquad} \in \underline{\qquad} \mid \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\}$$
   — Penser au théorème du rang.
2) Raisonner par l'absurde.
3) Écrire la définition d'une famille libre.
4) Trouver une base de $\mathrm{Ker} f$ pour commencer.
5) Voir ci-dessus pour montrer que $A \subset B$.

Corrigé ex. 1.

1) (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \\ &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right) - (n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + na_{n+1} - n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right). \end{aligned}$$

(b) Comme (a_n) est croissante, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a $a_{n+1} \geqslant a_k$. Donc, en sommant ces n inégalités, on obtient $na_{n+1} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 0$ et d'après la question précédente, $b_{n+1} - b_n \geqslant 0$. La suite (b_n) est donc croissante.

(c) Comme la suite (a_n) est convergente, elle est bornée. Comme de plus elle est croissante, elle est majorée par sa limite, notée ℓ.

Donc pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $a_k \leqslant \ell$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, en sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant n\ell.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $b_n \leqslant \ell$; la suite (b_n) est majorée par ℓ.

Ainsi la suite (b_n) est croisante et majorée ; elle converge donc vers une limite notée ℓ' vérifiant $\ell' \leqslant \ell$.

(d) Soit $n \in \mathbf{N}$, dans un premier temps, on peut écrire :

$$\frac{b_n + a_n}{2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_n}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{a_n}{2} = b_{2n} - \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \frac{a_n}{2}.$$

Or, comme (a_n) est croissante, pour tout $k \geqslant n+1$, on a $a_k \geqslant a_n$.

On a ainsi $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant (2n - (n+1) + 1)a_n = na_n$. On en déduit alors $\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant \frac{a_n}{2}$; c'est à dire $-\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \frac{a_n}{2} \geqslant 0$. De ce qui précède, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$b_{2n} \geqslant \frac{b_n + a_n}{2}.$$

(e) La suite (b_n) converge donc (b_{2n}) converge aussi vers la même limite. L'inégalité de la question précédente nous permet d'écrire (en passant à la limite) :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell' + \ell}{2}.$$

On en déduit $\ell' \geqslant \ell$; comme on a montré que $\ell \geqslant \ell'$, on obtient $\ell = \ell'$.

2) Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite convergente et décroissante ; on note ℓ sa limite. La suite $(\tilde{a}_n)$ définie pour tout n par $\tilde{a}_n = -a_n$ est croissante et convergente vers $-\ell$. On a donc $(\tilde{b}_n)$ la suite définie par $\tilde{b}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k$ est croissante et converge vers $-\ell$ d'après les questions précédentes.

Or $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = -\tilde{b}_n$ donc (b_n) est décroissante et converge vers ℓ.

3) (a) On raisonne par récurrence sur n pour montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ donc u_1 est bien défini et strictement positif.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que u_n est bien défini et strictement positif.

Par définition, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$ est bien défini ($u_n \neq 0$ par hypothèse de récurrence) et strictement positif (comme u_n par hypothèse de récurrence).

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a u_n est bien défini (et strictement positif).

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2}$ par définition donc $u_{n+1} - u_n > 0$ (un carré est toujours positif et le quotient n'est jamais nul). Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante.

(c) On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$; la fonction f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et on a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Comme f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, si (u_n) converge, c'est vers un point fixe de f (il est évident que (u_n) ne converge pas vers 0 puisqu'elle est croissante). Or $f(x) - x = \frac{1}{x^2} > 0$ donc f n'admet pas de point fixe. Ainsi (u_n) diverge et comme elle est croissante, c'est vers $+\infty$.

Alternative : supposons que (u_n) converge ; on note ℓ sa limite ; (u_{n+1}) converge vers ℓ et on a $\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2}$. Ce qui s'écrit $0 = \frac{1}{\ell^2}$. Or ceci est impossible donc (u_n) ne converge pas ; comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

4) (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, dans un premier temps, on peut écrire :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^3 + 1}{u_n^2} = u_n \left(\frac{u_n^3 + 1}{u_n^3} \right) = u_n \left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right).$$

Soit β un réel non nul, on a

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(u_n \left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right) \right)^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right)^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right)^\beta - 1 \right).$$

(b) Soit $\beta \neq 0$; on sait qu'il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$(1 + x)^\beta = 1 + \beta x + x\varepsilon(x).$$

On a donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1}{\beta \frac{1}{u_n^3}} = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{u_n^3}\right)$.

Comme (u_n) diverge vers $+\infty$, on a $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{u_n^3} = 0$ donc $\lim_{n \to \infty} \varepsilon\left(\frac{1}{u_n^3}\right) = 0$ et finalement,

$$\left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right)^\beta - 1 \right) \underset{n \to \infty}{\sim} \beta \frac{1}{u_n^3}.$$

(c) D'après les deux questions précédentes, on a

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \sim \beta \frac{u_n^\beta}{u_n^3} = \beta u_n^{\beta - 3} = \beta \mathrm{e}^{(\beta - 3)\ln(u_n)}.$$

Comme (u_n) diverge vers $+\infty$, $\ln(u_n) \to +\infty$; on a donc trois cas :

— si $\beta = 3$ alors $u_n^{\beta-3}$ est constante égale à 1 et $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers $\beta \neq 0$.

— si $\beta > 3$ alors $\mathrm{e}^{(\beta-3)\ln(u_n)} \to +\infty$ et $\beta u_n^{\beta-3}$ diverge vers $\pm\infty$ suivant le signe de β.

— si $\beta < 3$ alors $(\beta - 3)\ln(u_n) \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{(\beta-3)\ln(u_n)} \to 0$ donc $\beta u_n^{\beta-3}$ converge vers 0.

Ainsi la suite $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)_{n \in \mathbf{N}^*}$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\beta = 3$.

5) Comme $a_n = u_{n+1}^3 - u_n^3$, la suite (a_n) converge (d'après la question précédente). On a admis que la suite $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ convergeait vers la même limite. On a donc

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(u_{k+1}^3 - u_k^3\right) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n u_{k+1}^3 - \sum_{k=1}^n u_k^3\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=2}^{n+1} u_j^3 - \sum_{k=1}^n u_k^3\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(u_{n+1}^3 - u_1^3\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(u_{n+1}^3 - 1\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim a_n = 3$ on a aussi $\lim b_n = 3$ ainsi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(u_{n+1}^3 - 1\right) = 3 \text{ d'où } \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}^3}{3n} - \frac{1}{3n} = 1.$$

Comme $\lim \frac{1}{3n} = 0$, on en déduit, par continuité de la fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ en 1 que $\lim \sqrt[3]{\frac{u_{n+1}^3}{3n}} = 1$.

Ainsi $u_{n+1} \sim \sqrt[3]{3n}$; or il est facile de prouver que $\sqrt[3]{3n} \sim \sqrt[3]{3n+3}$ donc $u_{n+1} \sim \sqrt[3]{3(n+1)}$ donc $u_n \sim \sqrt[3]{3n}$.

Corrigé ex. 2.

1) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, par définition, il existe $x \in \mathbf{R}^3$ tel que $f(x) = y$. On a alors $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_{\mathbf{R}^3}$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. On obtient directement $\dim \mathrm{Im}f \leqslant \dim \mathrm{Ker}f$.
   Le théorème du rang appliqué à f donne : $\dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f = 3$.
   D'autre part, comme f n'est pas l'application nulle, $\dim \mathrm{Ker}f \leqslant 2$ d'où $\dim \mathrm{Im}f > 0$.
   Comme $\dim \mathrm{Im}f \leqslant \dim \mathrm{Ker}f$, on ne peut pas avoir $\dim \mathrm{Im}f = 3$ (la somme des dimension doit faire 3). Pour la même raison, on ne peut pas avoir $\dim \mathrm{Im}f = 2$.
   Finalement, $\dim \mathrm{Im}f = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}f = 2$.
2) Supposons par l'absurde que pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ tel que $f(x) = 0$, f serait l'application nulle. Or d'après l'énoncé, $f \neq 0$ donc il existe $x_0 \in \mathbf{R}^3$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
3) Soient α et β deux réels tels que $\alpha x_0 + \beta f(x_0) = 0$. En prenant l'image par f de chaque côté, on obtient :

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0 + \beta f(x_0)) &= f(0) & \\ \alpha f(x_0) + \beta f^2(x_0) &= 0 & \text{par linéarité} \\ \alpha f(x_0) &= 0 & \text{car } f^2 = 0 \end{aligned}$$

   Or $f(x_0) \neq 0$ donc $\alpha = 0$; en reportant dans la première égalité, on obtient $\beta f(x_0) = 0$ donc $\beta = 0$ (toujours car $f(x_0) \neq 0$). Finalement $\alpha = \beta = 0$ donc la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre.
4) On sait que $\dim \mathrm{Ker}f = 2$ et que $f(x_0) \neq 0 \in \mathrm{Ker}f$. On peut compléter le vecteur $f(x_0)$ avec un vecteur v de sorte que $(f(x_0), v)$ soit une base de $\mathrm{Ker}f$.
   Comme $x_0 \neq 0$ et que $f(x_0) \neq 0$, $x_0 \notin \mathrm{Ker}f$ et $\mathscr{B} = (f(x_0), x_0, v)$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$. Comme elle comporte 3 vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ de dimension 3 ; c'est une base. On a

$$\mathscr{M}\mathrm{at}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$ donc $y = f(f(x))$. Ainsi il existe $u = f(x)$ dans E tel que $f(u) = y$ donc $y \in \mathrm{Im}(f)$. Finalement $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Corrigé ex. 3.

1) (a) On remarque que l'encadrement que l'on veut obtenir s'écrit :

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \iff \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| < 1 \iff \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

   Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $|x| = \sqrt{x^2}$ donc

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \iff \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} < 1.$$

   Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $0 \leqslant x^2 < x^2+1$, on en déduit que $0 \leqslant \frac{x^2}{x^2+1} < 1$, d'où, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} < 1$. D'où le résultat.

   Alternative : Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $x^2 + 1 > x^2 \geqslant 0$; en prenant la racine carrée de chacun des nombres, on obtient $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$.
   Ainsi, en passant à l'inverse (pour $x \neq 0$), on a $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{|x|}$. On distingue alors deux cas :
   — pour $x < 0$, en multipliant par x, on obtient $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{x}{|x|} = -1$. On a aussi $0 > \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ donc pour tout $x < 0$, on a $1 > \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > -1$.
   — Pour $x > 0$, en multipliant par x, on obtient $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{x}{|x|} = 1$. On a aussi $0 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ donc pour tout $x > 0$, on a $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$.

   Pour tout $x \neq 0$, on a donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$; l'encadrement étant vérifié par $x = 0$ aussi, il est vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc $\sqrt{x^2+1}$ est défini pour tout $x \in \mathbf{R}$.
   D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ donc $-\sqrt{x^2+1} < x$ et $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Ainsi $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est bien défini pour tout $x \in \mathbf{R}$ et f est définie sur $\mathbf{R}$.

(c) Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2+1>0$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et comme $x+\sqrt{x^2+1}>0$, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée de telles fonctions.
On pose $g\colon x \mapsto x+\sqrt{x^2+1}$ (définie et dérivable sur $\mathbf{R}$), on trouve $g'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
On trouve enfin $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(d) On a clairement, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)>0$ donc f est croissante.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $x+\sqrt{x^2+1} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+1} = -\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(e) On a déjà vu que pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ donc f est bien une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1) = \ln(1+\sqrt{2}).$$

2) Soit $n \geqslant 2$, les fonctions $u\colon x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $v\colon x \mapsto x^{n-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. De plus, $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $v'(x) = (n-1)x^{n-2}$. Comme $n \geqslant 2$, $n-2 \geqslant 0$ et on peut effectuer une intégration par parties en écrivant :

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n-1}\times x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^{n-1}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}(n-1)x^{n-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2} - (n-1)I_n - (n-1)I_{n-2}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \geqslant 2$, $nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}$.

3) On trouve directement $I_2 = \frac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}$ à partir de la valeur de I_0.
On calcule ensuite $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$.
On trouve alors $I_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

4) (a) Pour tout réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a l'inégalité :

$$0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant x^n.$$

En intégrant à bornes croissantes entre 0 et 1, on trouve :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $(I_n)_n$ converge vers 0.

(b) Dan un premier temps, on remarque que pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in [0;\,1]$, on a $0 \leqslant x^n \leqslant x^{n-2}$ donc $I_n \leqslant I_{n-2}$.
De l'égalité prouvée en 2), on a $\sqrt{2} - I_n \geqslant 2(n-1)I_n$. D'où $\sqrt{2}+I_n \geqslant 2nI_n$.

(c) Pour tout $x \in [0;\,1]$, on a $1 \leqslant \sqrt{x^2+1} \leqslant \sqrt{2}$ donc $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant x^n$. En intégrant à bornes croissantes :

$$\frac{1}{\sqrt{2}(n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ ainsi } \frac{\sqrt{2}n}{(n+1)} \leqslant 2nI_n.$$

(d) On déduit que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{\sqrt{2}n}{n+1} \leqslant 2nI_n \leqslant \sqrt{2}+I_n.$$

Comme $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim I_n = 0$ on en déduit que $\lim \sqrt{2}nI_n = 1$ donc $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

Corrigé ex. 4. L'expérience aléatoire consiste donc à choisir un dé au hasard puis à lancer ce dé et à noter le numéro obtenu.

Le choix du dé se fait de manière équiprobable donc chaque dé à une probabilité de $\frac{1}{100}$ d'être choisi. En notant A l'évènement A=« le dé choisi est pipé » ; on a $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$.

On note S l'évènement S=« le numéro obtenu est un 6 ». D'après l'énoncé, on a alors les probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbf{P}(S \mid A) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}(S \mid \overline{A}) = \frac{1}{6}.$$

Comme $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales permet de calculer :

$$\mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(S \mid A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(S \mid \overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

On cherche à calculer $\mathbf{P}(A \mid S)$. Pour cela on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \mid S) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap S)}{\mathbf{P}(S)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(A \cap S)}{\mathbf{P}(A)} \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(S)} \\ &= \mathbf{P}(S \mid A) \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(S)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sachant qu'on a obtenu un 6 avec le dé choisi, la probabilité qu'il soit pipé est de $\frac{1}{2}$.

Corrigé ex. 5. *Idée de la preuve :* les dés sont construits de sorte que la somme de deux faces opposées donne toujours 7 : si le 6 est sur la face du dessus, le 1 est sur la face du dessous ; de même le 4 et le 3 sont opposés ; le 5 et le 2 aussi. Ainsi lorsque l'on lance 3 dés, la somme numéros des faces du dessus ajoutée à celle des faces du dessous donne toujours 21.

Pour chaque tirage des trois dés donnant une somme dépassant dix, la somme des faces du dessous ne dépasse pas dix. De même, pour chaque tirage des trois dés donnant une somme ne dépassant pas dix, la somme des faces du dessous dépasse dix.

Plus précisément, en distinguant les trois dés, on remarque que chaque tirage amène un triplet $(x, y, z) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$ et comme les dés sont équilibrés et indépendants, on se place sur l'espace probabilisé

$$\Omega = \left(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3, \mathscr{T} = \mathscr{P}\left(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3\right), \mathbf{P}\right)$$

où $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme.

On considère les évènements $A =$« la somme des points amenés dépasse dix » et $B =$« la somme des points amenés ne dépasse pas dix ».

Comme la probabilité est uniforme, on a $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$. Or le raisonnement ci-dessus nous permet, à chaque configuration de dés appartenant à A de lui associer de manière bijective une configuration de B. Ainsi $\text{card}\,(A) = \text{card}\,(B)$ et $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$.