Travaux de vacances – Algèbre linéaire

Pour les futurs carrés : ex. 1 et 2.
Pour les futurs cubes : ex. 3 et 4 (mais regarder ex. 1 et 2 si besoin).

Exercice 1. Calcul matriciel

1) On considère a, b et c trois réels ainsi que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer $M^\intercal$, la transposée de M.
   (b) Calculer le produit MN.

2) Résoudre les systèmes d'équations suivants :

(a) $\begin{cases} y - 3z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ -5x + 2y + z = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x + y - z = -2 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2y - 3z + t = 2 \\ 3x + y - z - t = -1 \\ -3x + z - 4t = 5 \\ x - y + z - t = 4 \end{cases}$

3) Résoudre les systèmes d'équations suivants :

(a) $\begin{cases} x - 4y - 2z = 1 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ -3x + 9y + 5z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x + 2y - 4z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - y + 4z + 6t = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 3t = 2 \\ 3x - y - 3z + t = 3 \\ 4x - 2z + 2t = 5 \end{cases}$

4) Résoudre les systèmes d'équations suivants (en fonction du paramètre réel a à partir de la question e) :

(a) $\begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ -3x + 9y + 5z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x + 2y - 4z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - y + 4z + 6t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 3t = 0 \\ 3x - y - 3z + t = 0 \\ 4x - 2z + 2t = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - 2y + z = 0 \\ -x - \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x + 2y = a \\ 3x - y = 4a \end{cases}$ (f) $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$

5) Inverser, lorsque c'est possible, les matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $E_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$(x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y).$$

1) Déterminer le noyau de f ; en déduire que f est bijectif.
2) Donner l'expression de f^{-1}.

Soient $E_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = z\big\}$ et $E_2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\big\}$.

3) Vérifier que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ et donner la dimension ainsi qu'une base de chacun.
4) Établir que $f(E_1) = E_1$ et $f(E_2) = E_2$.

Exercice 3. **Matrices de rang un**

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée de taille $n \times n$ à coefficients réels.

1) Montrer que

$$\mathrm{rg}(M) = 1 \iff \text{il existe } X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ des colonnes (non nulles) telles que } M = X \cdot Y^{\intercal}$$

2) On suppose M de rang 1 et symétrique ; montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $Y = \lambda X$ et $M = X \cdot Y^{\intercal}$.
3) Montrer que si M est une matrice de rang 1 alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $M^2 = \alpha M$.

Exercice 4. **Ulm 2006**

On dit qu'une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est nilpotente s'il existe un entier p tel que $N^p = [0]$ (matrice nulle). On note I_r la matrice identité de $\mathscr{M}_r(\mathbf{R})$, pour $1 \leqslant r \leqslant n$.

1) On note $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est : $m_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.

   Montrer que J est nilpotente.
2) On fixe désormais $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice nilpotente et p un entier tel que $N^p = [0]$.
   (a) Rappeler la formule donnant la valeur des sommes partielles $1 + x + \ldots + x^n$ d'une série géométrique (pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \geqslant 1$ entier).
   (b) S'en inspirer pour écrire, pour tout entier q, $I_n - N^q$ comme $(I_n - N)M_q$, où M_q est une matrice à expliciter en fonction de N et q.
   (c) En déduire que $I_n - N$ est inversible, et préciser son inverse.
   (d) Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -a \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   est inversible et calculer son inverse.

Corrigé ex. 1.

1) (a) On trouve $M^{\intercal} = \begin{pmatrix} a & c & 1 \\ b & b & 1 \\ c & a & 1 \end{pmatrix}$. Attention, $M^{\intercal} \neq N$.

(b) Le produit MN est :

$$MN = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

2) (a)

$$\begin{cases} y-3z=1 \\ 3x+y-z=2 \\ -5x+2y+z=5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y-z=2 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ y-3z=1 \\ -5x+2y+z=5 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ y-3z=1 \\ 11y-2z=25 & 3L_3+5L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ y-3z=1 \\ 31z=14 & L_3-11L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{31} \\ y = \frac{73}{31} \\ z = \frac{14}{31} \end{cases}$$

Le système admet une solution unique : $(x,y,z) = \left(\frac{1}{31}, \frac{73}{31}, \frac{14}{31}\right)$.

(b) Le système admet une solution unique : $(x,y,z) = (-4,-2,-4)$.

(c) Le système admet une solution unique : $(x,y,z,t) = \left(-\frac{3}{4}, -11, -\frac{37}{4}, -3\right)$.

3) (a)

$$\begin{cases} x-4y-2z=1 \\ x+8y+2z=0 \\ -3x+9y+5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4y-2z=1 \\ 12y+4z=-1 & L_2-L_1 \\ -3y-z=3 & L_3+3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4y-2z=1 \\ 3y+z=-1/3 & \frac{1}{4}L_2 \\ 3y+z=-3 & -L_3 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes du dernier système sont incompatibles ; le système n'admet pas de solution.

(b) Le système n'admet pas de solution.

(c) Le système n'admet pas de solution.

4) (a) Les étapes sont les mêmes que les premières étapes du premier système de la question précédente ; seuls les seconds membres diffèrent.

$$\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ x+8y+2z=0 \\ -3x+9y+5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 12y+4z=0 & L_2-L_1 \\ -3y-z=0 & L_3+3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3y+z=0 & \frac{1}{4}L_2 \\ 3y+z=0 & -L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y \\ z=-3y \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions : les triplets $(x,y,z) = (2\alpha, \alpha, -3\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

(b) Le système admet une infinité de solutions : les triplets $(x,y,z) = (-2\alpha, \alpha, \alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

(c) Le système admet une infinité de solutions : les triplets $(x,y,z,t) = (-\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

(d) Le système admet une infinité de solutions : les triplets $(x,y,z) = (2\alpha-4\beta, 3\beta, 3\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et tout $\beta \in \mathbf{R}$.

(e) Le système admet une solution unique : $(x,y) = \left(\frac{9}{7}a, -\frac{a}{7}\right)$.

(f)

$$\begin{cases} ax + \ \ y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + ay - z = 0 & L_1 \to L_3 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ ax + \ \ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + ay - z = 0 \\ (2a-3)y - z = 0 & L_2 + 2L_1 \\ (1+a^2)y + (1-a)z = 0 & L_3 + aL_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + ay - z = 0 \\ (1+a^2)y + (1-a)z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ (2a-3)y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + ay - z = 0 \\ (1+a^2)y + (1-a)z = 0 \\ (a^2 - 5a + 2)z = 0 & (1+a^2)L_3 - (2a-3)L_2 \end{cases}$$

On a $a^2 - 5a + 2 = 0 \iff a = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. On distingue alors 2 cas :
- si $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$, la seule solution du système est le triplet $(0,0,0)$.
- si $a = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ ou $a = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$, le système admet une infinité de solutions :
$$(x,y,z) = \left(-(a+1)\alpha, (a-1)\alpha, (1+a^2)\alpha\right),\ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

5) (a) Nous appliquons la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-L_1 \& -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 + 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On sait que A est inversible dès la première étape (matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont tous non nuls) ; on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(c) C n'est pas inversible.

(d) $D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $E_n^{-1} = E_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

(f)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -c & 0 & 1 & -1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 - (1+a)L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -c & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -a & -(c+a+ac) & 1 & 0 & -(1+a) \end{array}\right) \qquad (1)$$

On distingue alors deux cas :

— Si $b \neq 0$; on continue l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -c & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -a & -(c+a+ac) & 1 & 0 & -(1+a) \end{array}\right) \xrightarrow{bL_3+aL_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -c & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -ab-ac-bc-abc & b & a & -a-b-ab \end{array}\right)$$

On distingue encore deux cas :

— si $ab+ac+bc+abc \neq 0$ alors F est inversible et on trouve

$$F^{-1} = \frac{1}{ab+ac+bc+abc} \begin{pmatrix} b+c+bc & -c & -b \\ -c & a+c+ac & -a \\ -b & -a & a+b+ab \end{pmatrix}.$$

— Si $ab+ac+bc+abc = 0$ alors F n'est pas inversible.

— Si $b = 0$, on reprend la ligne (1) en remplaçant b par 0 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -a & -(c+a+ac) & 1 & 0 & -(1+a) \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1+c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a & -(c+a+ac) & 1 & 0 & -(1+a) \\ 0 & 0 & -c & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Donc dans ce cas, F est inversible si et seulement si b et c sont non nuls.

Si a et c sont non nuls, on a

$$F^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ -c & a+c+ac & -a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'on peut résumer la situation ainsi : F est inversible si et seulement si $ab+ac+bc+abc \neq 0$ et dans ce cas,

$$F^{-1} = \frac{1}{ab+ac+bc+abc} \begin{pmatrix} b+c+bc & -c & -b \\ -c & a+c+ac & -a \\ -b & -a & a+b+ab \end{pmatrix}.$$

Corrigé ex. 2.

1) L'application f est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même ; son noyau est donc

$$\mathrm{Ker} f = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0_{\mathbf{R}^3}\right\}.$$

On cherche à résoudre le système d'inconnues réelles x, y et z :

$$\begin{cases} \quad y+z=0 \\ x \quad +z=0 \\ x+y \quad =0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \quad =0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x \quad +z=0 \\ \quad y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y \quad =0 \\ \quad -y+z=0 & L_2-L_1 \\ \quad y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \quad =0 \\ \quad -y+\ z=0 \\ \quad\quad 2z=0 & L_3+L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad =0 \\ \quad y \quad =0 \\ \quad\quad z=0 \end{cases}$$

Ainsi $\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ et f est injective.
D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathbf{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg}\, f$; on vient de voir que $\dim \mathrm{Ker} f = 0$ donc $\mathrm{rg}\, f = 3$. Ainsi $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace de dimension 3 de $\mathbf{R}^3$, on a donc $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}^3$ et f est surjective.
Ainsi f est injective et surjective ; elle est bijective.

2) L'idée ici est d'appliquer la méthode de Gauss-Jordan ; nous allons **pour une fois** donner une version légèrement différente dans sa forme.
Les premières opérations sont exactement celles de la question précédente, elles correspondent aux opérations sur les lignes permettant de rendre le système triangulaire supérieur. Plutôt que les appliquer à un « couple » de matrices ; nous allons conserver la présentation sous forme de système : étant donné un triplet (a,b,c) (élément de l'ensemble d'arrivée), on cherche un antécédent (donc dans l'ensemble de départ) (x,y,z) ; son existence est assurée par la question précédente. On cherche à exprimer (x,y,z) en fonction de (a,b,c).

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \iff (x,y,z) = f^{-1}(a,b,c).$$

$$\begin{cases} \quad y+z=a \\ x \quad +z=b \\ x+y \quad =c \end{cases} \iff \begin{cases} \quad y+z=a+0+0 \\ x \quad +z=0+b+0 \\ x+y \quad =c+0+0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \quad =0+0+c & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x \quad +z=0+b+0 \\ \quad y+z=a+0+0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y \quad =0+0+c \\ \quad -y+z=0+b-c & L_2-L_1 \\ \quad y+z=a+0+0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \quad =0+0+c \\ \quad -y+\ z=0+b-c \\ \quad\quad 2z=a+b-c & L_3+L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y \quad =0+0+c \\ \quad -y+z=0+b-c \\ \quad\quad z=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2} & \frac{1}{2}L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \quad =0+0+c \\ \quad y \quad =\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2} & -L_2+L_3 \\ \quad\quad z=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad =-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2} & L_1-L_2 \\ \quad y \quad =\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2} \\ \quad\quad z=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, on a $f^{-1}(a,b,c) = \left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}, \frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)$; matriciellement

$$f^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

3) — On remarque déjà que $0_{\mathbf{R}^3} \in E_1$.
Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de E_1 (*i.e.* $x_1 = y_1 = z_1$ et $x_2 = y_2 = z_2$) ainsi que $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \\ z_1+\lambda z_2 \end{pmatrix} \text{ dans ce cas, } x_1+\lambda x_2 = y_1+\lambda y_2 = z_1+\lambda z_2$$

Donc $u_1 + \lambda u_2$ appartient à E_1 et E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3$.

Enfin, on a

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff x = y = z \iff u = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \iff u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $E_1 = \operatorname{vect}\left\{ \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; E_1 est de dimension 1.

— On considère l'application $h\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $h\colon (x, y, z) \longmapsto x + y + z$. Cette application est linéaire car

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On a $E_2 = \operatorname{Ker} h$, comme h est linéaire, E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Comme h n'est pas l'application nulle, elle est surjective ($\mathbf{R}$ est l'espace d'arrivée) et le théorème du rang nous permet de trouver $\dim \operatorname{Ker} h = 2 = \dim E_2$.

On trouve alors facilement $E_2 = \operatorname{vect}\left\{ \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

4) On a $f(\alpha) = 2\alpha$ comme E_1 est un sous-espace vectoriel, $f(\alpha) \in E_1$.
Soit $u \in \mathbb{E}_1$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = \lambda\alpha$ (car $\{\alpha\}$ est une famille génératrice (car c'est une base) de E_1). On a $f(u) = f(\lambda\alpha) = \lambda f(\alpha) = 2\lambda\alpha \in E_1$ donc $f(E_1) \subset E_1$.
De la même façon, $f^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha$ donc $f^{-1}(E_1) \subset E_1$, ce qui équivaut à $E_1 \subset f(E_1)$ donc $f(E_1) = E_1$.

Corrigé ex. 3.

1) On démontre les deux implications séparément : pour cela on utilise le fait que le rang de M est la dimension de l'image de l'application linéaire canoniquement associée à M ; c'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les $\{Me_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

   — Soit M telle qu'il existe X et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ des colonnes (non nulles) telles que $M = X \cdot Y^\intercal$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et on a pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$:

   $$[X \cdot Y^\intercal]_{i,j} = [M]_{i,j} = x_i \times y_j$$

   Comme X et Y sont non nulles, il existe i_0 et j_0 tels que $x_{i_0} \times y_{j_0} \neq 0$ donc M n'est pas la matrice nulle et $\mathrm{rg}(M) \geqslant 1$.
   En notant $e_1, \ldots, e_n$ les n vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on a pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ $Me_j = (X \cdot Y^\intercal)e_j = X \cdot (Y^\intercal \cdot e_j) = X \times y_j = y_j X$.
   En particulier $Me_{j_0} \neq 0$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $y_{j_0} Me_j = y_j Me_{j_0}$ donc tous les Me_j sont colinéaires à Me_{j_0} et M est de rang 1.

   — Soit M une matrice de rang 1 ; il existe j_0 tel que $Me_{j_0} \neq 0$ (sinon M serait la matrice nulle) et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, Me_j est colinéaire à Me_{j_0} ; ainsi, il existe $\alpha_j \in \mathbf{R}$ tel que $Me_j = \alpha_j Me_{j_0}$.
   On pose alors $X = Me_{j_0}$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
   On a $X \neq 0$ et le coefficient à la ligne j_0 de Y est égal à 1 donc $Y \neq 0$.
   Enfin, en remarquant que Me_j est la colonne j de M, on a $M = X \cdot Y^\intercal$.

2) Soit M de rang 1 et symétrique ; il existe donc X, $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $M = X \cdot Y^\intercal$ et $M^\intercal = M$.
   On remarque que si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on a $Z^\intercal e_j = z_j$.
   Comme M est de rang 1, elle est non nulle et il existe j_0 tel que $Me_{j_0} \neq 0$.
   On a alors : $Me_{j_0} = X \cdot Y^\intercal e_{j_0} = y_{j_0} X$ et $M^\intercal e_{j_0} = Y \cdot X^\intercal e_{j_0} = x_{j_0} Y$.
   Comme $Me_{j_0} \neq 0$, on a $y_{j_0} \neq 0$ et comme M est symétrique, on a $y_{j_0} X = x_{j_0} Y$ donc $X = \frac{x_{j_0}}{y_{j_0}} Y$.
   Le scalaire $\frac{x_{j_0}}{y_{j_0}}$ étant non nul, $\lambda = \frac{y_{j_0}}{x_{j_0}}$ convient.

3) Soit M de rang 1, il existe X, $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $M = X \cdot Y^\intercal$; on a alors

   $$M^2 = (X \cdot Y^\intercal)(X \cdot Y^\intercal) = X(Y^\intercal \cdot X)Y^\intercal = \alpha XY^\intercal = \alpha M$$

   en notant $\alpha = Y^\intercal \cdot X$.

Corrigé ex. 4.

1) On calcule les coefficients de la matrice J^2 : pour tout $(i, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on note $\alpha_{i,k} = \left[J^2\right]_{i,k}$ alors

   $$\alpha_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} m_{j,k}.$$

   Le produit $m_{i,j} m_{j,k}$ est non nul si et seulement si les deux nombres sont non nuls, *i.e.* $j = i + 1$ et $k = j + 1$. Ainsi les coefficients de J^2 sont nuls sauf les coefficients $\alpha_{i,i+2}$ (qui sont égaux à 1).
   On démontre par « récurrence » que pour tout entier $a \leqslant n - 1$, on a $[J^a]_{i,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i + a \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.
   Ainsi pour J^{n-1} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé « en haut à droite » qui vaut 1 (*i.e.* $\left[J^{n-1}\right]_{1,n} = 1$). Donc on trouve $J \times J^{n-1} = J^n = 0$. La matrice J est nilpotente.

2) (a) On a, pour $x \in \mathbf{R}$,

   $$1 + x + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n + 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{sinon} \end{cases}$$

   Pour cet exercice, dans le cas $x \neq 1$, on préférera écrire : $(1 - x)(1 + x + \ldots + x^n) = 1 - x^{n+1}$.

(b) On pose $M_q = \sum_{k=0}^{q-1} N^k$; montrons que pour tout entier $q \geqslant 1$, $I_n - N^q = (I_n - N)M_q$.
Soit $q \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}(I_n - N)M_q &= (I_n - N)\sum_{k=0}^{q-1} N^k = \sum_{k=0}^{q-1} N^k - N \times \sum_{k=0}^{q-1} N^k = \sum_{k=0}^{q-1} N^k - \sum_{k=0}^{q-1} N^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} N^k - \sum_{j=1}^{q} N^j = N^0 - N^q = I_n - N^q.\end{aligned}$$

(c) Comme N est nilpotente, il existe $q \geqslant 1$ tel que $N^q = 0$ donc l'égalité précédente donne :

$$I_n = (I_n - N)M_q.$$

Comme $M_q = \sum_{k=0}^{q-1} N^k$, M_q commute avec I_n et avec N donc on a aussi $I_n = M_q(I_n - N)$. Ainsi $I_n - N$ est inversible et son inverse est M_q.

(d) La matrice considérée est $A = I_n - aJ$ avec J nilpotente ($J^n = 0$) d'après la première question (donc aJ est nilpotente aussi). Ainsi d'après la question précédente, A est inversible et

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (aJ)^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^k J^k.$$

La matrice est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$