RAPPELS

Bonjour et bienvenue en B/L !

En mathématiques, pendant toute votre prépa, vous n'aurez pas droit à la calculatrice ; cela va constituer un changement majeur pour certains d'entre vous. Cela signifie surtout que vous allez devoir progresser en calcul (mental et algébrique) et apprendre de manière plus rigoureuse les résultats vus en cours. Cela signifie aussi que le raisonnement va prendre une place bien plus importante qu'au lycée et que le résultat à une question sera presque moins important que le cheminement logique qui y mène.

C'est pour cela que ce document commence par rappeler les règles utiles pour manipuler les nombres (sous forme numérique ou littérale).

Je vous propose ensuite une liste d'exercices « mécaniques » regroupant certains points sur lesquels vous devrez être à l'aise (la correction est fournie). Vous pouvez aussi vous entraîner avec la fiche http://bl.carnot.free.fr/docs_public/exos_calc_litteral.pdf et avec le cahier de calcul http://bl.carnot.free.fr/docs_public/cahier_complet_avec_reponses_melangees.pdf.

L'année sera difficile pour beaucoup d'entre vous en mathématiques : le programme est dense, les semaines passent vite et les lacunes sont difficiles à combler. Il faudra prévoir de travailler très régulièrement les mathématiques : apprentissage du cours, exercices d'entraînement, préparation des colles, des DS, ...

Je vous suggère de faire ces exercices à la fin des vacances, pour reprendre l'année avec l'esprit prêt à travailler.

Mon adresse mèl : emmanuel.dufraine@proton.me

Le site des maths en B/L à Carnot : http://bl.carnot.free.fr

Profitez bien de ces vacances et à bientôt.

1) **Les ensembles de nombres** :
   - On note $\mathbf{N}$ (ou $\mathbb{N}$) l'ensemble des *entiers naturels* : $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$;
   - $\mathbf{Z}$ (ou $\mathbb{Z}$) est l'ensemble des *entiers relatifs* : $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
   - $\mathbf{Q}$ (ou $\mathbb{Q}$) est l'ensemble des nombres *rationnels* : $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} | \, p \in \mathbf{Z} \text{ et } q \in \mathbf{N}^*\}$;
     On rappelle que le nombre noté $\frac{p}{q}$ est en fait l'unique nombre x qui vérifie : $qx = p$.
   - $\mathbf{R}$ (ou $\mathbb{R}$) est l'ensemble des nombres *réels*.
2) **Règles de calcul avec les réels :** pour tout $a \in \mathbf{R}$, tout $b \in \mathbf{R}$ et tout $c \in \mathbf{R}$, on a :
   - $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$ (commutativité) ;
   - $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (associativité) ;
   - l'addition admet 0 comme **élément neutre** : $a + 0 = 0 + a = a$;
   - la multiplication admet 1 comme **élément neutre** : $a \times 1 = 1 \times a = a$;
   - l'**opposé** de a est l'unique nombre noté $-a$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
   - l'**inverse** de $a \neq 0$ est l'unique nombre noté $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} tel que $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} = 1$;
   - $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (distributivité).

   (a) Produits
   - Un produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   - Un produit de deux réels non nuls est positif si et seulement si les deux réels sont de même signe.
   - Un produit de deux réels non nuls est négatif si et seulement si les deux réels sont de signe opposé.
   - Si $ac = bc$ et que $c \neq 0$ alors $a = b$.
   - Pour tout a et tout b réels, on a les **identités remarquables** :

   $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

   (b) Quotients

   On considère a, b, c et d des nombres réels avec b et d non nuls.
   - Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est nul si et seulement si a est nul (un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul) ;
   - la règle du signe d'un quotient est la même que celle d'un produit ;
   - On peut *simplifier* les quotients : $\dfrac{ad}{bd} = \dfrac{a}{b}$;

— $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$, $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ et si $c\neq 0$, on a $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$.

(c) Puissances
On rappelle que pour tout nombre réel a et tout entier relatif n, on définit :

$$a^n=\begin{cases}\overbrace{a\times a\times\ldots\times a}^{n\text{ facteurs}} & \text{si } n>0\\ 1 & \text{si } n=0\\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{si } n<0 \text{ et } a\neq 0\end{cases}$$

Pour a et b réels et m et n entiers relatifs, on a :

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\qquad (a^m)^n=a^{mn},\qquad (a\times b)^m=a^m\times b^m,\qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

(d) Racines carrées Soit a un réel positif, on note $\sqrt{a}$ l'unique nombre positif dont le carré vaut a.
Pour tout a positif, $(\sqrt{a})^2=a$ et pour tout réel a, $\sqrt{a^2}=|a|$ (voir le § valeur absolue).
Pour a et b positifs, on a $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b\neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3) **Inégalités** Soient a, b et c trois nombres réels,
   (a) Somme (et différence) : $a+c$ et $b+c$ sont rangés dans le **même** ordre que a et b ;
   (b) Produit (et quotients) : ac et bc sont rangés
      — dans le **même** ordre que a et b si c est positif ;
      — dans l'ordre **contraire** de a et b si c est négatif.
   (c) Avec deux inégalités : si $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$ alors

$$a+c\leqslant b+d \text{ et si les 4 nombres sont positifs, } ac\leqslant bd.$$

   (d) Opérations usuelles
      — le carré et la racine carrée préservent l'ordre des nombres positifs : si $b>a\geqslant 0$ alors

$$a^2<b^2 \text{ et } \sqrt{a}<\sqrt{b};$$

      — le passage à l'inverse renverse l'ordre des nombres positifs : si $b>a>0$ alors

$$0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}.$$

      — Comparaison des puissances de a : soit a un nombre positif et n un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{ll}\text{si } 0\leqslant a\leqslant 1 \text{ alors} & a^n\leqslant a^2\leqslant a\leqslant 1\\ \text{si } a\geqslant 1 \text{ alors} & a^n\geqslant a^2\geqslant a\geqslant 1\end{array}$$

4) **Valeur absolue**
Soit $x\in\mathbf{R}$, $|x|$ désigne la *valeur absolue* de x :

$$|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$$

Exercice. On considère les deux nombres :

$$A=\frac{999\,999}{999\,998} \text{ et } B=\frac{999\,998}{999\,999}$$

1) Comparer A et B à 1.
2) On rappelle que si x et y sont deux réels, la *distance* de x à y est le nombre $d(x,y)=|x-y|$.
   Vérifier que $d(A,1)=A-1$ et $d(B,1)=1-B$.
3) Lequel des deux nombres A et B est le plus proche de 1 ?
4) Soit a un nombre strictement positif, lequel des deux nombres $\frac{a+1}{a}$ et $\frac{a}{a+1}$ est le plus proche de 1 ?

Exercice 1

Développer et réduire chacune des expressions littérales suivantes :

$A = (9\,x - 5)^2$
$B = (10\,x + 7) \times (10\,x - 7)$
$C = (8\,x - 3) \times (3\,x + 8)$

$D = (x + 7)^2$
$E = \left(9\,x - \dfrac{2}{5}\right) \times \left(\dfrac{2}{5}\,x + 9\right)$
$F = -\,(5\,x + 5) \times (5\,x - 5)$

Exercice 2

Résoudre l'équation :

$$\frac{6\,x - 6}{3} + \frac{-\,10\,x + 6}{2} = \frac{9\,x - 3}{9}$$

Exercice 3

Factoriser chacune des expressions littérales suivantes (on peut factoriser en trouvant un facteur commun, en reconnaissant une identité remarquable ou un trinôme du second degré) :

$A = (-9\,x + 1) \times (-x + 5) + (-9\,x + 1) \times (9\,x - 7)$
$B = -\,(-3\,x - 2)^2 + 36$
$C = 4\,x^2 + 28\,x + 49$

$D = 25\,x^2 - 49$
$E = (-5\,x - 4)^2 + (8\,x + 1) \times (-5\,x - 4)$
$F = (x - 1) \times (9\,x + 4) - (x - 1)$

Exercice 4

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \dfrac{40}{7} + \dfrac{4}{7} \div \dfrac{-\,2}{7}$

$B = \dfrac{\dfrac{8}{3} - 6}{\dfrac{5}{2} + 4}$

$C = \dfrac{-\,10}{9} \div \left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{-\,11}{2}\right)$

Exercice 5

►1. On donne $f :\ x \longmapsto -4\,x^2 + 3\,x + 4$
$g :\ x \longmapsto -x + 5$

a) Quelle est l'image de -3 par la fonction f ?

b) Quelle est l'image de 2 par la fonction g ?

c) Calculer $f\,(2)$.

d) Calculer $g\,(-4)$.

►2. Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction h.

x	-4	-3	-1	0	1	2	3
$h\,(x)$	-3	2	1	3	-4	0	-1

a) Quelle est l'image de -3 par la fonction h ?

b) Compléter : $h\,(\ldots\ldots) = 0$

c) Compléter : $h\,(3) = \ldots\ldots$

d) Quel est l'antécédent de 3 par la fonction h ?

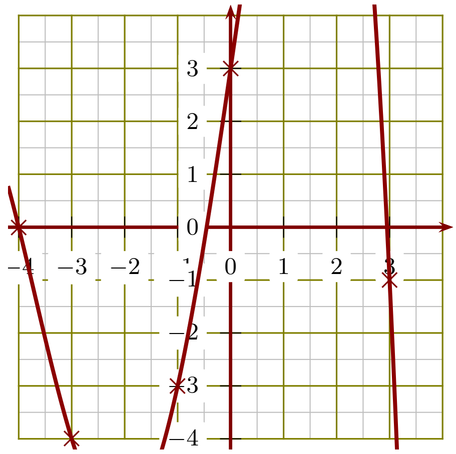
▶3. Le graphique ci-contre représente une fonction k :

a) Donner un antécédent de -1 par la fonction k.

b) Compléter : $k(-1) = \ldots\ldots$

c) Compléter : $k(\ldots\ldots) = -4$

d) Quelle est l'image de -4 par la fonction k ?



Exercice 6

Dans une urne, il y a 4 boules jaunes (J), 2 boules oranges (O) et 5 boules bleues (B), indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules.

▶1. Quelle est la probabilité de tirer une boule orange au premier tirage ?

▶2. Construire un arbre des probabilités décrivant l'expérience aléatoire.

▶3. Quelle est la probabilité que la première boule soit bleue et la deuxième soit orange ?

▶4. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit jaune ?

Exercice 7

Calculer les expressions suivantes et donner l'écriture scientifique du résultat.

Rappel : l'*écriture scientifique* d'un nombre x est l'écriture de $x = \pm a10^n$ où a est un nombre décimal avec un seul chiffre non nul avant la virgule (donc $1 \leq a < 10$) et n est un entier relatif.

Vous pouvez regarder https://www.youtube.com/watch?v=5k73Z1gcJXU
et https://www.youtube.com/watch?v=Efs6XCiJcTw&t=51s.

$$A = \frac{3 \times 10^{-10} \times 14 \times 10^5}{50 \times (10^3)^5}$$

$$B = \frac{0{,}21 \times 10^5 \times 50 \times 10^{-5}}{2{,}8 \times (10^{-2})^3}$$

Exercice 8

On peut consulter https://www.youtube.com/watch?v=cXRPbRJNSsI, https://www.youtube.com/watch?v=7YZKOMuuFXA puis https://www.youtube.com/watch?v=zg7H6gfqlqA avant de faire cet exercice.

▶1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.

$$A = 3\sqrt{45} - \sqrt{20} + 5\sqrt{80}$$

$$B = \sqrt{28} \times \sqrt{63} \times \sqrt{112}$$

▶2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.

$$C = \left(3\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)^2$$

$$D = \left(2\sqrt{7} + 3\sqrt{5}\right)^2$$

▶3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier.

$E = \left(3 - 3\sqrt{2}\right)\left(3 + 3\sqrt{2}\right)$

$F = \dfrac{36\sqrt{12}}{8\sqrt{27}}$

Exercice 9

Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} -3x + 10y = 52 \\ 9x + 5y = 89 \end{cases}$

Exercice 10

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9$.

▶**1.** **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x-6)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{81}{8}$.

▶**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = -9$

c) $f(x) = -\frac{81}{8}$

▶**3.** **a)** Dresser le tableau de variations de f.

b) Dresser le tableau de signes de f.

▶**4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) Résoudre $f(x) \geqslant 0$.

b) Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 11

Factoriser les polynômes suivants :

▶**1.** Factoriser $P(t) = 160t^2 - 240t + 90$ à l'aide d'une identité remarquable.

▶**2.** $R(y) = y^2 + 10y$

▶**3.** $S(z) = -10z^2 + z + 2$

▶**4.** $R(t) = -t^2 + 6t + 4$

Exercice 12

Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

▶**1.** $z^2 + 4z - 60 = 0$

▶**2.** $3t^2 + 5t - 8 = 0$

▶**3.** $x^2 + 8x - 7 = 0$

Exercice 13

▶**1.** Étudier le signe du polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 15$ sur $I = [0 ; 5]$.

▶**2.** Étudier le signe du polynôme $P(x) = 35x^2 + 17x - 36$ sur $I = [-5 ; 5]$.

▶**3.** Étudier le signe du polynôme $P(x) = x^2 + x + 8$ sur $I = \mathbf{R}$.

Exercice 14

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $h(t) = \dfrac{4t-3}{-5t+4}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ -1]$.

c) En déduire le sens de variations de h sur I.

►2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + \dfrac{21}{2}x^2 + 18x$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

Exercice 15

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -4\,x^2 - 3\,x$ $\qquad$ $Q(x) = -64\,x + 64 + 16\,x^2$ $\qquad$ $R(x) = x^2 - 7 - 2\,x$

Exercice 16

Pour chacune des suites u suivantes, calculer : (a) le troisième terme ; (b) le terme de rang 5 ; (c) u_3.

►1. (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 8$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal à l'opposé du précédent.

►2. u est la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = \frac{2}{3}n - 10$.

►3. (u_n) est la suite définie pour $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ \text{Pour tout } n \geq 0 : u_{n+1} = u_n - 7. \end{cases}$$

Exercice 17

►1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 7]$ par $f(x) = \dfrac{-2x+6}{-x+8}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 7]$.

c) En déduire le sens de variations de f sur I.

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + \dfrac{39}{2}x^2 + 120x + 4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

Exercice 18

►1. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

►2. On considère la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{t+6}{3t-9}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D}'_h$.

c) Déterminer les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

d) Dresser le tableau de variations de h sur $\mathcal{D}_h$.

Corrigé de l'exercice 1

Développer chacune des expressions littérales suivantes :

$A = (9\,x - 5)^2$
$A = (9\,x)^2 - 2 \times 9\,x \times 5 + 5^2$
$\boxed{A = 81\,x^2 - 90\,x + 25}$

$B = (10\,x + 7) \times (10\,x - 7)$
$B = (10\,x)^2 - 7^2$
$\boxed{B = 100\,x^2 - 49}$

$C = (8\,x - 3) \times (3\,x + 8)$
$C = 8\,x \times 3\,x + 8\,x \times 8 - 3 \times 3\,x - 3 \times 8$
$C = 24\,x^2 + 64\,x - 9\,x - 24$
$C = 24\,x^2 + (64 - 9)\,x - 24$
$\boxed{C = 24\,x^2 + 55\,x - 24}$

$D = (x + 7)^2$
$D = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2$
$\boxed{D = x^2 + 14\,x + 49}$

$E = \left(9\,x - \dfrac{2}{5}\right) \times \left(\dfrac{2}{5}\,x + 9\right)$
$E = 9\,x \times \dfrac{2}{5}\,x + 9\,x \times 9 - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5}\,x - \dfrac{2}{5} \times 9$
$E = \dfrac{18}{5}\,x^2 + 81\,x - \dfrac{4}{25}\,x - \dfrac{18}{5}$
$E = \dfrac{18}{5}\,x^2 + \left(81 - \dfrac{4}{25}\right)\,x - \dfrac{18}{5}$
$E = \dfrac{18}{5}\,x^2 + \left(\dfrac{81_{\times 25}}{1_{\times 25}} - \dfrac{4}{25}\right)\,x - \dfrac{18}{5}$
$E = \dfrac{18}{5}\,x^2 + \left(\dfrac{2025}{25} - \dfrac{4}{25}\right)\,x - \dfrac{18}{5}$
$\boxed{E = \dfrac{18}{5}\,x^2 + \dfrac{2021}{25}\,x - \dfrac{18}{5}}$

$F = -\,(5\,x + 5) \times (5\,x - 5)$
$F = -\left((5\,x)^2 - 5^2\right)$
$F = -\,(25\,x^2 - 25)$
$\boxed{F = -25\,x^2 + 25}$

Corrigé de l'exercice 2

Résoudre l'équation :

$$\frac{6\,x - 6}{3} + \frac{-\,10\,x + 6}{2} = \frac{9\,x - 3}{9}$$

$$\frac{(6\,x - 6)_{\times 6}}{3_{\times 6}} + \frac{(-10\,x + 6)_{\times 9}}{2_{\times 9}} = \frac{(9\,x - 3)_{\times 2}}{9_{\times 2}}$$

$$\frac{36\,x - 36 - 90\,x + 54}{\cancel{18}} = \frac{18\,x - 6}{\cancel{18}}$$

$$-54\,x + 18 = 18\,x - 6$$

$$-54\,x - 18\,x = -6 - 18$$

$$-72\,x = -24$$

$$x = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{La solution de cette équation est } \dfrac{1}{3}.}$

Corrigé de l'exercice 3

Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

$A = (-9\,x + 1) \times (-x + 5) + (-9\,x + 1) \times (9\,x - 7)$
$A = (-9\,x + 1) \times (-x + 5 + 9\,x - 7)$
$A = (-9\,x + 1) \times (-x + 9\,x + 5 - 7)$
$\boxed{A = (-9\,x + 1) \times (8\,x - 2)}$

$B = -\,(-3\,x - 2)^2 + 36$
$B = -\,(-3\,x - 2)^2 + 6^2$
$B = (6 - 3\,x - 2) \times (6 - (-3\,x - 2))$

$B = (-3\,x + 6 - 2) \times (6 + 3\,x + 2)$
$B = (-3\,x + 6 - 2) \times (3\,x + 6 + 2)$
$\boxed{B = (-3\,x + 4) \times (3\,x + 8)}$

$C = 4\,x^2 + 28\,x + 49$
$C = (2\,x)^2 + 2 \times 2\,x \times 7 + 7^2$
$\boxed{C = (2\,x + 7)^2}$

$D = 25\,x^2 - 49$
$D = \left(\sqrt{25}\,x\right)^2 - \sqrt{49}^2$
$D = \left(\sqrt{25}\,x + \sqrt{49}\right) \times \left(\sqrt{25}\,x - \sqrt{49}\right)$

$\boxed{D = (5\,x + 7) \times (5\,x - 7)}$

$E = (-5\,x - 4)^2 + (8\,x + 1) \times (-5\,x - 4)$
$E = (-5\,x - 4) \times (-5\,x - 4) + (8\,x + 1) \times (-5\,x - 4)$
$E = (-5\,x - 4) \times (-5\,x - 4 + 8\,x + 1)$
$E = (-5\,x - 4) \times (-5\,x + 8\,x - 4 + 1)$
$\boxed{E = (-5\,x - 4) \times (3\,x - 3)}$

$F = (x - 1) \times (9\,x + 4) - (x - 1)$
$F = (x - 1) \times (9\,x + 4) - (x - 1) \times 1$
$F = (x - 1) \times (9\,x + 4 - 1)$
$\boxed{F = (x - 1) \times (9\,x + 3)}$

Corrigé de l'exercice 4

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \dfrac{40}{7} + \dfrac{4}{7} \div \dfrac{-2}{7}$

$A = \dfrac{40}{7} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{-7}{2}$

$A = \dfrac{40}{7} + \dfrac{2 \times \cancel{2}}{-1 \times \cancel{7}} \times \dfrac{1 \times \cancel{7}}{1 \times \cancel{2}}$

$A = \dfrac{40}{7} + -2$

$A = \dfrac{40}{7} + \dfrac{-2_{\times 7}}{1_{\times 7}}$

$A = \dfrac{40}{7} + \dfrac{-14}{7}$

$\boxed{A = \dfrac{26}{7}}$

$B = \dfrac{\dfrac{8}{3} - 6}{\dfrac{5}{2} + 4}$

$B = \dfrac{\dfrac{8}{3} - \dfrac{6_{\times 3}}{1_{\times 3}}}{\dfrac{5}{2} + \dfrac{4_{\times 2}}{1_{\times 2}}}$

$B = \dfrac{\dfrac{8}{3} - \dfrac{18}{3}}{\dfrac{5}{2} + \dfrac{8}{2}}$

$B = \dfrac{-10}{3} \div \dfrac{13}{2}$

$B = \dfrac{-10}{3} \times \dfrac{2}{13}$

$B =$

$\boxed{B = \dfrac{-20}{39}}$

$C = \dfrac{-10}{9} \div \left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{-11}{2}\right)$

$C = \dfrac{-10}{9} \div \left(\dfrac{3_{\times 2}}{7_{\times 2}} + \dfrac{-11_{\times 7}}{2_{\times 7}}\right)$

$C = \dfrac{-10}{9} \div \left(\dfrac{6}{14} + \dfrac{-77}{14}\right)$

$C = \dfrac{-10}{9} \div \dfrac{-71}{14}$

$C = \dfrac{-10}{9} \times \dfrac{-14}{71}$

$C = \dfrac{-10}{-9 \times \cancel{-1}} \times \dfrac{14 \times \cancel{-1}}{71}$

$\boxed{C = \dfrac{140}{639}}$

Exercice 5

►**1.** On donne $f:\ x \longmapsto -4\,x^2 + 3\,x + 4$
$g:\ x \longmapsto -x + 5$

a) Quelle est l'image de -3 par la fonction f ?
$f\,(-3) = -4 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) + 4$
$f\,(-3) = -4 \times 9 - 9 + 4$
$f\,(-3) = -36 - 9 + 4$
$f\,(-3) = -45 + 4$
$\boxed{f\,(-3) = -41}$

b) Quelle est l'image de 2 par la fonction g ?
$g\,(2) = -2 + 5$
$\boxed{g\,(2) = 3}$

c) Calculer $f\,(2)$.
$f\,(2) = -4 \times 2^2 + 3 \times 2 + 4$
$f\,(2) = -4 \times 4 + 6 + 4$
$f\,(2) = -16 + 10$

$\boxed{f(2) = -6}$

d) Calculer $g(-4)$.
$g(-4) = -(-4) + 5$
$g(-4) = 4 + 5$
$\boxed{g(-4) = 9}$

▶2. Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction h.

x	-4	-3	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-3	2	1	3	-4	0	-1

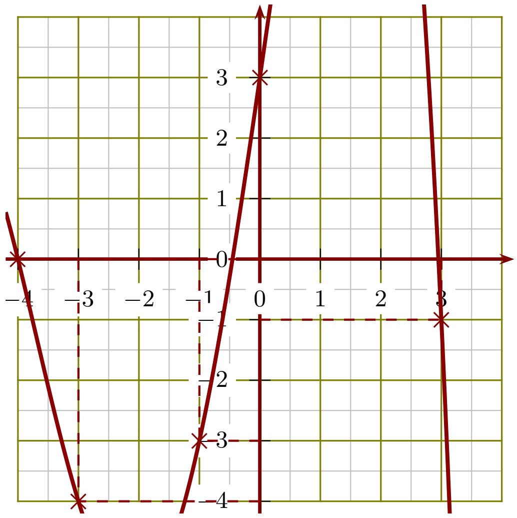
a) L'image de -3 par la fonction h est $\mathbf{2}$.

b) $h(3) = -\mathbf{1}$.

c) Un antécédent de 3 par la fonction h est $\mathbf{0}$.

d) $h(\mathbf{2}) = 0$.

▶3. Le graphique ci-après représente une fonction k :



a) Un antécédent de -1 par la fonction k est $\mathbf{3}$.

b) $k(-1) = -\mathbf{3}$.

c) $k(-\mathbf{3}) = -4$.

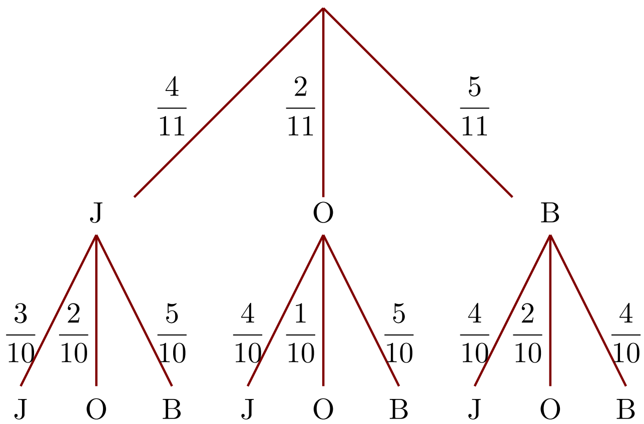
d) L'image de -4 par la fonction k est $\mathbf{0}$.

Corrigé de l'exercice 6

Dans une urne, il y a 4 boules jaunes (J), 2 boules oranges (O) et 5 boules bleues (B), indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules.

▶1. Quelle est la probabilité de tirer une boule orange au premier tirage ?
Il y a 11 boules dans l'urne dont 2 boules oranges.
La probabilité de tirer une boule orange au premier tirage est donc $\dfrac{2}{11}$.

▶2. Construire un arbre des probabilités décrivant l'expérience aléatoire.



▶3. Quelle est la probabilité que la première boule soit bleue et la deuxième soit orange ?
On note (B , O) l'évènement : « la première boule tirée est bleue et la deuxième tirée est orange » et on utilise l'arbre construit précédemment.
$p(\mathrm{B}\ ,\ \mathrm{O}) = \dfrac{5}{11} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{10}{110}$
La probabilité que la première boule soit bleue et la deuxième soit orange est égale à $\dfrac{10}{110}$.

▶4. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit jaune ?
On note (? , J) l'évènement : « la deuxième boule tirée est jaune ».

$$p\,(?\ ,\ \mathrm{J}) = p\,(\mathrm{J}\ ,\ \mathrm{J}) + p\,(\mathrm{O}\ ,\ \mathrm{J}) + p\,(\mathrm{B}\ ,\ \mathrm{J}) = \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{11} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{40}{110}$$

Corrigé de l'exercice 7

Calculer les expressions suivantes et donner l'écriture scientifique du résultat.

$$A = \frac{3 \times 10^{-10} \times 14 \times 10^5}{50 \times \left(10^3\right)^5}$$

$$A = \frac{3 \times 14}{50} \times \frac{10^{-10+5}}{10^{3\times 5}}$$

$$A = 0{,}84 \times 10^{-5-15}$$

$$A = 8{,}4 \times 10^{-1} \times 10^{-20}$$

$$\boxed{A = 8{,}4 \times 10^{-21}}$$

$$B = \frac{0{,}21 \times 10^5 \times 50 \times 10^{-5}}{2{,}8 \times \left(10^{-2}\right)^3}$$

$$B = \frac{0{,}21 \times 50}{2{,}8} \times \frac{10^{5+(-5)}}{10^{-2\times 3}}$$

$$B = 3{,}75 \times 10^{0-(-6)}$$

$$\boxed{B = 3{,}75 \times 10^6}$$

Corrigé de l'exercice 8

►**1.** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.

$$A = 3\sqrt{45} - \sqrt{20} + 5\sqrt{80}$$

$$A = 3\sqrt{9} \times \sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} + 5\sqrt{16} \times \sqrt{5}$$

$$A = 3 \times 3 \times \sqrt{5} - 1 \times 2 \times \sqrt{5} + 5 \times 4 \times \sqrt{5}$$

$$A = 9\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 20\sqrt{5}$$

$$\boxed{A = 27\sqrt{5}}$$

$$B = \sqrt{28} \times \sqrt{63} \times \sqrt{112}$$

$$B = \sqrt{4} \times \sqrt{7} \times \sqrt{9} \times \sqrt{7} \times \sqrt{16} \times \sqrt{7}$$

$$B = 2 \times \sqrt{7} \times 3 \times \sqrt{7} \times 4 \times \sqrt{7}$$

$$B = 24 \times \left(\sqrt{7}\right)^2 \times \sqrt{7}$$

$$B = 24 \times 7 \times \sqrt{7}$$

$$\boxed{B = 168\sqrt{7}}$$

►**2.** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.

$$C = \left(3\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)^2$$

$$C = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + 2 \times 3\sqrt{5} \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2$$

$$C = 9 \times 5 + 6\sqrt{30} + 1 \times 6$$

$$\boxed{C = 51 + 6\sqrt{30}}$$

$$D = \left(2\sqrt{7} + 3\sqrt{5}\right)^2$$

$$D = \left(2\sqrt{7}\right)^2 + 2 \times 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{5} + \left(3\sqrt{5}\right)^2$$

$$D = 4 \times 7 + 12\sqrt{35} + 9 \times 5$$

$$\boxed{D = 73 + 12\sqrt{35}}$$

►**3.** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier.

$$E = \left(3 - 3\sqrt{2}\right)\left(3 + 3\sqrt{2}\right)$$

$$E = 3^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2$$

$$E = 9 - 9 \times 2$$

$$\boxed{E = -9}$$

$$F = \frac{36\sqrt{12}}{8\sqrt{27}}$$

$$F = \frac{36 \times \sqrt{4} \times \cancel{\sqrt{3}}}{8 \times \sqrt{9} \times \cancel{\sqrt{3}}}$$

$$F = \frac{36 \times 2}{8 \times 3}$$

$$\boxed{F = 3}$$

Corrigé de l'exercice 9

Résoudre le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcl} -3\,x & + & 10\,y & = & 52 \\ 9\,x & + & 5\,y & = & 89 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} (\times 3) \\ (\times 1) \end{array}$

$\left\{\begin{array}{rcrcl} -9\,x & + & 30\,y & = & 156 \\ 9\,x & + & 5\,y & = & 89 \end{array}\right.$ On ajoute les deux lignes

$\cancel{-9\,x} + 30\,y \cancel{+9\,x} + 5\,y = 156 + 89$

$35\,y = 245$

$\boxed{y = \dfrac{245}{35} = 7}$

$-3\,x + 10\,y = 52$ et $y = 7$ donc :

$-3\,x + 10 \times 7 = 52$

$-3\,x = 52 - 70$

$\boxed{x = \dfrac{-18}{-3} = 6}$

La solution de ce système d'équations est $(x;\ y) = (6;\ 7)$.

Vérification : $\left\{\begin{array}{l} -3\ \times 6 + 10\ \times 7 = -18 + 70 = 52 \\ 9\ \times 6 + 5\ \times 7 = 54 + 35 = 89 \end{array}\right.$

Corrigé de l'exercice 10

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x - 9$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 0{,}5\ (x+3)\ (x-6) &= 0{,}5\ (x \times x + 3 \times x - 6 \times x + 3 \times\ (-6)) \\ &= 0{,}5\ \left(x^2 - 3\,x - 18\right) \\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times\ (-3\,x) + 0{,}5 \times\ (-18) \\ &= 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x - 9 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 0{,}5\ (x-1{,}5)^2 - 10{,}125 &= 0{,}5\ \left(x^2 - 2 \times 1{,}5 \times x + 1{,}5^2\right) - 10{,}125 \\ &= 0{,}5\ \left(x^2 - 3\,x + 2{,}25\right) - 10{,}125 \\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times\ (-3\,x) + 0{,}5 \times 2{,}25 - 10{,}125 \\ &= 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x + 1{,}125 - 10{,}125 \\ &= 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x - 9 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+3)\,(x-6) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 3 = 0 &\text{ ou } x - 6 = 0 \\ x = -3 &\text{ ou } x = 6 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -3 et 6.

b) $f(x) = -9$ On remarque que la forme développée contient la constante -9 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -9 \\ 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x - 9 &= -9 \\ 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x - 9 + 9 &= -9 + 9 \\ 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 - 1{,}5\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x - 1{,}5 \times x &= 0 \\ x\,(0{,}5\,x - 1{,}5) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $0{,}5\,x - 1{,}5 = 0$

$x = 0$ ou $0{,}5\,x = 1{,}5$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{1{,}5}{0{,}5}$

$x = 0$ ou $x = 3$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 3$.

c) $f(x) = -10{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-10{,}125$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -10{,}125 \\ 0{,}5\,(x - 1{,}5)^2 - 10{,}125 &= -10{,}125 \\ 0{,}5\,(x - 1{,}5)^2 - 10{,}125 + 10{,}125 &= -10{,}125 + 10{,}125 \\ 0{,}5\,(x - 1{,}5)^2 &= 0 \\ (x - 1{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 1{,}5 &= 0 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 1{,}5$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-1{,}5}{2\times 0{,}5}$, soit 1,5, et $f(1{,}5) = 0{,}5 \times 1{,}5^2 - 1{,}5 \times 1{,}5 - 9 = -10{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$1{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-10{,}125$	↗

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\ (x+3)\ (x-6)$.

- Le premier facteur $x+3$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=3$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$.
- Le second facteur $x-6$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-6$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$.

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$0{,}5$		$+$		$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 0{,}5\ (x+3)\ (x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in]-\infty\,;\,-3] \cup [6\,;\,+\infty[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-10{,}125$. Le minimum de f est donc $-10{,}125$, et il est atteint pour $x = 1{,}5$.

Corrigé de l'exercice 11

►1. Factoriser $P(t) = 160t^2 - 240t + 90$

$$160t^2 - 240t + 90 = 10 \times \left[16t^2 - 24t + 9\right] = 10 \times \left[(4t)^2 + 2 \times 4t \times 3 + 3^2\right] = 10(4t+3)^2$$

►2. Factoriser $R(y) = y^2 + 10y$

Je calcule $\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 0 = 100$ et $\sqrt{100} = 10$.

Comme $\Delta > 0$, $R(y)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-10-\sqrt{100}}{2\times 1} &= \frac{-10-\sqrt{100}}{2}\\ &= \frac{-10-10}{2}\\ &= \frac{-20}{2}\\ &= -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-10+\sqrt{100}}{2\times 1} &= \frac{-10+\sqrt{100}}{2}\\ &= \frac{-10+10}{2}\\ &= \frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

Les racines de R sont $y_1 = -10$ et $y_2 = 0$.

On peut donc écrire

$$R(y) = (y - (-10))\,(y-0) = (y+10)\,(y)$$

►3. Factoriser $S(z) = -10z^2 + z + 2$
Je calcule $\Delta = 1^2 - 4 \times (-10) \times 2 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.
Comme $\Delta > 0$, $S(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-1+\sqrt{81}}{2\times(-10)} &= \frac{-1+\sqrt{81}}{-20}\\ &= \frac{-1+9}{-20}\\ &= \frac{8}{-20}\\ &= \frac{-2_{\times(-4)}}{5_{\times(-4)}}\\ &= \frac{-2}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-1-\sqrt{81}}{2\times(-10)} &= \frac{-1-\sqrt{81}}{-20}\\ &= \frac{-1-9}{-20}\\ &= \frac{-10}{-20}\\ &= \frac{1_{\times(-10)}}{2_{\times(-10)}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Les racines de S sont $x_1 = \frac{-2}{5}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
On peut donc écrire

$$S(x) = -10 \times \left(x - \left(-\frac{2}{5}\right)\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = -10 \times \left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

►4. Factoriser $R(t) = -t^2 + 6t + 4$
Je calcule $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 52$ et $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
Comme $\Delta > 0$, $R(t)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-6+\sqrt{52}}{2\times(-1)} &= \frac{-6+\sqrt{52}}{-2}\\ &= \frac{-6+2\sqrt{13}}{-2}\\ &= \frac{3_{\times(-2)} - 1_{\times(-2)}\sqrt{13}}{1_{\times(-2)}}\\ &= 3-\sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-6-\sqrt{52}}{2\times(-1)} &= \frac{-6-\sqrt{52}}{-2}\\ &= \frac{-6-2\sqrt{13}}{-2}\\ &= \frac{3_{\times(-2)} + 1_{\times(-2)}\sqrt{13}}{1_{\times(-2)}}\\ &= 3+\sqrt{13}\end{aligned}$$

Les racines de R sont $t_1 = 3 - \sqrt{13}$ et $t_2 = 3 + \sqrt{13}$.
On peut donc écrire

$$R(t) = -1 \times \left(t - \left(3 - \sqrt{13}\right)\right)\left(t - \left(3 + \sqrt{13}\right)\right)$$

Corrigé de l'exercice 12

Résoudre les équations suivantes :

►1. $z^2 + 4z - 60 = 0$
Je calcule $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 256$ et $\sqrt{256} = 16$.
Comme $\Delta > 0$, $P(z)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-4-\sqrt{256}}{2\times 1} &= \frac{-4-\sqrt{256}}{2}\\ &= \frac{-4-16}{2}\\ &= \frac{-20}{2}\\ &= -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-4+\sqrt{256}}{2\times 1} &= \frac{-4+\sqrt{256}}{2}\\ &= \frac{-4+16}{2}\\ &= \frac{12}{2}\\ &= 6\end{aligned}$$

Les racines de P sont $z_1 = -10$ et $z_2 = 6$.

►**2.** $3t^2 + 5t - 8 = 0$

Je calcule $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 121$ et $\sqrt{121} = 11$.

Comme $\Delta > 0$, $P(t)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-5-\sqrt{121}}{2\times 3} &= \frac{-5-\sqrt{121}}{6} \\ &= \frac{-5-11}{6} \\ &= \frac{-16}{6} \\ &= \frac{-8_{\times 2}}{3_{\times 2}} \\ &= \frac{-8}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-5+\sqrt{121}}{2\times 3} &= \frac{-5+\sqrt{121}}{6} \\ &= \frac{-5+11}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ &= 1\end{aligned}$$

Les racines de P sont $t_1 = \frac{-8}{3}$ et $t_2 = 1$.

►**3.** $x^2 + 8x - 7 = 0$

Je calcule $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 92$ et $\sqrt{92} = 2\sqrt{23}$.

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-8-\sqrt{92}}{2\times 1} &= \frac{-8-\sqrt{92}}{2} \\ &= \frac{-8-2\sqrt{23}}{2} \\ &= \frac{-4_{\times 2}-1_{\times 2}\sqrt{23}}{1_{\times 2}} \\ &= -4-\sqrt{23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-8+\sqrt{92}}{2\times 1} &= \frac{-8+\sqrt{92}}{2} \\ &= \frac{-8+2\sqrt{23}}{2} \\ &= \frac{-4_{\times 2}+1_{\times 2}\sqrt{23}}{1_{\times 2}} \\ &= -4+\sqrt{23}\end{aligned}$$

Les racines de P sont $x_1 = -4 - \sqrt{23}$ et $x_2 = -4 + \sqrt{23}$.

Corrigé de l'exercice 13

►**1.** Étudier le signe du polynôme $P = x^2 + 2x - 15$ sur $I = [0\ ;\ 5]$.

Je calcule $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$ et $\sqrt{64} = 8$.

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-2-\sqrt{64}}{2\times 1} &= \frac{-2-\sqrt{64}}{2} \\ &= \frac{-2-8}{2} \\ &= \frac{-10}{2} \\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-2+\sqrt{64}}{2\times 1} &= \frac{-2+\sqrt{64}}{2} \\ &= \frac{-2+8}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Les racines de P sont $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$.

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines.

Or -5 n'est pas dans $[0\ ;\ 5]$. Ainsi

x	0		3		5
$P(x)$		$-$	0	$+$	

►2. Étudier le signe du polynôme $P = 35x^2 + 17x - 36$ sur $I = [-5\ ;\ 5]$.
Je calcule $\Delta = 17^2 - 4 \times 35 \times (-36) = 5\,329$ et $\sqrt{5\,329} = 73$.
Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-17-\sqrt{5\,329}}{2\times 35} &= \frac{-17-\sqrt{5\,329}}{70}\\ &= \frac{-17-73}{70}\\ &= \frac{-90}{70}\\ &= \frac{-9_{\times 10}}{7_{\times 10}}\\ &= \frac{-9}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-17+\sqrt{5\,329}}{2\times 35} &= \frac{-17+\sqrt{5\,329}}{70}\\ &= \frac{-17+73}{70}\\ &= \frac{56}{70}\\ &= \frac{4_{\times 14}}{5_{\times 14}}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Les racines de P sont $x_1 = \dfrac{-9}{7}$ et $x_2 = \dfrac{4}{5}$.
Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-5		$-\frac{9}{7}$		$\frac{4}{5}$		5
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►3. Étudier le signe du polynôme $P = x^2 + x + 8$ sur $I = \mathbb{R}$.
Je calcule $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 8 = -31$.
Comme $\Delta < 0$, $P(x)$ n'a pas de racines. Comme $\Delta < 0$, $P(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	

Corrigé de l'exercice 14

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $h(t) = \dfrac{4t-3}{-5t+4}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5t + 4 = 0$.

$$\begin{aligned}-5t+4 &= 0\\ -5t &= -4\\ t &= \frac{-4}{-5}\end{aligned}$$

Or $\dfrac{4}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ -1]$.

$$h'(t) = \frac{4 \times (-5t+4) - (4t-3) \times (-5)}{(-5t+4)^2} = \frac{11}{(-5t+4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-5t+4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $1 > 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) > 0$.

t	-10	-1
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\dfrac{43}{54}$ $\nearrow$	$-\dfrac{7}{9}$

►2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + \dfrac{21}{2}x^2 + 18x$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$q'(x) = 3x^2 + 21x + 18$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 21^2 - 4 \times 3 \times 18 = 225$ et $\sqrt{225} = 15$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-21-\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{-21-\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{-21-15}{6}\\ &= \frac{-36}{6}\\ &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-21+\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{-21+\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{-21+15}{6}\\ &= \frac{-6}{6}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		-1		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		-6		-1		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	-130	$\nearrow$	54	$\searrow$	$-\dfrac{17}{2}$	$\nearrow$	$2\,230$

Corrigé de l'exercice 15

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned}P(x) &= -4x^2 - 3x\\ &= -x \times (4x+3)\end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-3}{4}}$

$$\begin{aligned}Q(x) &= 16x^2 - 64x + 64\\ &= (4x)^2 - 2\times 4x \times 8 + 8^2\\ &= (4x-8)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{2}$

$R(x) = x^2 - 2x - 7$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -7$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4\times 1\times(-7)\\ \Delta &= 4 - (-28)\\ \Delta &= 32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2-\sqrt{32}}{2\times 1}\\ x_1 &= \frac{2-\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{2}\\ x_1 &= \frac{\left(1-2\sqrt{2}\right)\times \cancel{2}}{1\times\cancel{2}}\\ x_1 &= 1-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{2+\sqrt{32}}{2\times 1}\\ x_2 &= \frac{2+\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{2}\\ x_2 &= \frac{\left(1+2\sqrt{2}\right)\times \cancel{2}}{1\times\cancel{2}}\\ x_2 &= 1+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{1 - 2\sqrt{2}}$ et $\boxed{1 + 2\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 16

►1. Selon l'énoncé, le premier terme de (u_n) est $u_0 = 8$. Puisque chaque terme (sauf le premier) est égal à l'opposé du précédent, on a : $u_1 = -u_0 = -8$; $u_2 = -u_1 = 8$; $u_3 = -u_2 = -8$; $u_4 = -u_3 = 8$; $u_5 = -u_4 = -8$.

a) Calcul du troisième terme : le premier terme est u_0 ; le deuxième terme est u_1 ; le troisième terme est u_2. Le terme demandé est donc : $u_2 = 8$.

b) Le terme de rang 5 est : $u_5 = -8$.

c) Nous avons calculé que : $u_3 = -8$.

►2. La suite u est définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = \frac{2}{3}n - 10$. Elle est donc définie par son terme général : pour calculer un terme de rang n, on peut calculer directement l'image de n par la suite.

a) Calcul du troisième terme : le premier terme est u_2 ; le deuxième terme est u_3 ; le troisième terme est u_4. Le terme demandé est donc : $u_4 = \frac{2}{3} \times 4 - 10 = \frac{8}{3} - \frac{10 \times 3}{3} = \frac{8-30}{3} = \frac{-22}{3}$. La solution est $u_4 = \frac{-22}{3}$.

b) Le terme de rang 5 est u_5. Le terme demandé est donc : $u_5 = \frac{2}{3} \times 5 - 10 = \frac{10}{3} - \frac{10 \times 3}{3} = \frac{10-30}{3} = \frac{-20}{3}$. La solution est donc : $u_5 = \frac{-20}{3}$.

c) On a : $u_3 = \frac{2}{3} \times 3 - 10 = \frac{6}{3} - \frac{10 \times 3}{3} = \frac{6-30}{3} = -8$. La solution est donc : $u_3 = -8$.

►3. La suite (u_n) est définie par récurrence, pour $n \geq 0$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ \text{Pour tout } n \geq 0 : u_{n+1} = u_n - 7. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 - 7 = 9 - 7 = 2 \\
u_2 &= u_1 - 7 = 2 - 7 = -5 \\
u_3 &= u_2 - 7 = -5 - 7 = -12 \\
u_4 &= u_3 - 7 = -12 - 7 = -19 \\
u_5 &= u_4 - 7 = -19 - 7 = -26
\end{aligned}$$

a) Calcul du troisième terme : le premier terme est u_0 ; le deuxième terme est u_1 ; le troisième terme est u_2. Le terme demandé est donc : $u_2 = -5$.

b) Le terme de rang 5 est : $u_5 = -26$.

c) Nous avons calculé que : $u_3 = -12$.

Corrigé de l'exercice 17

►1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 7]$ par $f(x) = \dfrac{-2x + 6}{-x + 8}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-x + 8 = 0$.

$$\begin{aligned}
-x + 8 &= 0 \\
-x &= -8 \\
x &= \frac{-8}{-1} \\
x &= 8
\end{aligned}$$

Or 8 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 7]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 7]$.

$$f'(x) = \frac{(-2) \times (-x+8) - (-2x+6) \times (-11)}{(-x+8)^2} = \frac{-10}{(-x+8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(-x+8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-10 < 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10	7
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{13}{9}$ ↘	-8

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + \frac{39}{2}x^2 + 120x + 4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 3x^2 + 39x + 120$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 39^2 - 4 \times 3 \times 120 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-39-\sqrt{81}}{2\times 3} = \frac{-39-\sqrt{81}}{6} = \frac{-39-9}{6} = \frac{-48}{6} = -8$$

$$\frac{-39+\sqrt{81}}{2\times 3} = \frac{-39+\sqrt{81}}{6} = \frac{-39+9}{6} = \frac{-30}{6} = -5$$

Les racines de p' sont $x_1 = -8$ et $x_2 = -5$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-8		-5		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		-8		-5		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	-246	↗	-220	↘	$-\frac{467}{2}$	↗	$4\,154$

Corrigé de l'exercice 18

►1. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 6x^2 + 30x + 24$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 30^2 - 4 \times 6 \times 24 = 324$ et $\sqrt{324} = 18$.

Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-30-\sqrt{324}}{2\times 6} = \frac{-30-\sqrt{324}}{12} = \frac{-30-18}{12} = \frac{-48}{12} = -4$$

$$\frac{-30+\sqrt{324}}{2\times 6} = \frac{-30+\sqrt{324}}{12} = \frac{-30+18}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

Les racines de f' sont $x_1 = -4$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	19	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3+15x^2+24x+3 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3+15x^2+24x+3 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

▶2. On considère la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{t+6}{3t-9}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
La fonction rationnelle h est définie et dérivable en t si $3t-9 \neq 0$.

$$\begin{aligned} 3t-9 &= 0 \\ 3t &= 9 \\ t &= \frac{9}{3} \\ t &= 3 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_h = \mathcal{D'}_h =]-\infty\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D'}_h$.

$$h'(t) = \frac{11\times(3t-9)-(t+6)\times 3}{(3t-9)^2} = \frac{-27}{(3t-9)^2}$$

c) Déterminer les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t+6}{3t-9} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{3t} = \frac{-1}{3}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t+6}{3t-9} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{3t} = \frac{-1}{3}$$

Pour $t = 3$, on a $t + 6 = 9 > 0$.
De plus, $3t - 9 < 0$ si $t < 3$ et $3t - 9 > 0$ si $t > 3$.

$$\lim_{\substack{t \to 3 \\ t < 3}} \frac{t+6}{3t-9} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{t \to 3 \\ t > 3}} \frac{t+6}{3t-9} = -\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de h sur $\mathcal{D}_h$.
Comme $(3t-9)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-27 < 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	$-\infty$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$h(x)$	$\frac{-1}{3}$	↘	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	$\frac{-1}{3}$