Dérivées usuelles

On donne les formules pour une fonction $f : x \mapsto f(x)$, l'ensemble de dérivabilité est donné sur la colonne de droite.

Fonction f	D_f	Fonction dérivée f'	$D_{f'}$
$x^n,\ n \in \mathbf{N}^*$	$\mathbf{R}$	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$
$x^n,\ n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$	$\mathbf{R}^*$	nx^{n-1}	$\mathbf{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x^\alpha,\ \alpha \in]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
e^x	$\mathbf{R}$	e^x	$\mathbf{R}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$\cos x$	$\mathbf{R}$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$\mathbf{R}$	$\cos x$	$\mathbf{R}$
$\tan x$	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\}$
$\arctan x$	$\mathbf{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

Formules de dérivation

Pour les formules suivantes, u et v sont deux fonctions (dérivables) d'une même variable. Elles peuvent être appliquées *après* avoir étudier la dérivabilité de la fonction résultante ($u \neq 0$ ou $v \neq 0$ pour l'inverse et le quotient, image de u incluse dans l'ensemble de dérivabilité de v pour la composée).

$(u+v)' = u' + v'$	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u)\, u'}$$

Les formules suivantes sont des conséquences de la formule de dérivation d'une composée de fonctions, mais on peut les connaître également :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \text{ pour } n \in \mathbf{Z}^* \text{ et } u \neq 0 \text{ si } n < 0 \qquad (\sin u)' = u' \cos u$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1} \text{ pour } \alpha \in \mathbf{R} \text{ et } u > 0 \qquad (\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \text{ pour } u > 0 \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(e^u)' = u'e^u \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ pour } u > 0$$

Exercice 1. Après avoir donné leur ensemble de définition et leur ensemble de dérivabilité ; calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto 3x^5 - 2x^4 + 7x^2 + \dfrac{22}{7}$;
2) $f_2 : x \mapsto 3e^x + 2x^7$;
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2\ln x$;
4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{12}{x} + \sqrt{x}$;
5) $f_5 : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$;
6) $f_6 : x \mapsto 7\sqrt{x} + 3$.

Exercice 2. Après avoir donné leur ensemble de définition et leur ensemble de dérivabilité ; calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto (x^2 + 2x - 8)(x + 4)$;
2) $f_2 : x \mapsto (x^3 - 3x + 1)e^x$;
3) $f_3 : x \mapsto \sqrt{x} \ln x$;
4) $f_4 : x \mapsto (x^2 + 2x - 1) \ln x$;
5) $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x} \ln(x)$;
6) $f_6 : x \mapsto (2x + \dfrac{1}{x})(3x - 1)$;
7) $f_7 : x \mapsto x^3(1 + \sqrt{x})$;
8) $f_8 : x \mapsto (1 - 2x) \cos x$;
9) $f_9 : x \mapsto (x - 1)^4(x + 1)^4$;
10) $f_{10} : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$.

Exercice 3. Après avoir donné leur ensemble de définition et leur ensemble de dérivabilité ; calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$;
2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$;
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{3x^2 + 1}$;
4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{e^x}$;
5) $f_5 : x \mapsto \tan x$;
6) $f_6 : x \mapsto \dfrac{2x + 1}{3x - 1}$;
7) $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$;
8) $f_8 : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}$.

Exercice 4. Après avoir donné leur ensemble de définition et leur ensemble de dérivabilité ; calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \ln(x^2+1)$;
2) $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$;
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$;
4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x^2)}$;
5) $f_5 : x \mapsto (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$;
6) $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$;
7) $f_7 : x \mapsto \cos(x^2)$;
8) $f_8 : x \mapsto \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 5. Après avoir donné leur ensemble de définition et leur ensemble de dérivabilité ; calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$;
2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$;
3) $f_3 : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x^2}$;
4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{-x^2\ln x}{1+x}$;
5) $f_5 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$;
6) $f_6 : x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{\sin x}$;
7) $f_7 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$;
8) $f_8 : x \mapsto x^x$.

Exercice 6. Après avoir donné leur ensemble de définition et leur ensemble de dérivabilité ; calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$;
2) $f_2 : x \mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$;
3) $f_3 : y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$;
4) $f_4 : h \mapsto \dfrac{\alpha}{h} + \dfrac{h}{2}\beta$;
5) $f_5 : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x+1}$;
6) $f_6 : x \mapsto \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;
7) $f_7 : x \mapsto \dfrac{x+y}{1+xy}$;
8) $f_8 : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x)$;
9) $f_9 : x \mapsto x - n\ln x$;
10) $f_{10} : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$;
11) $f_{11} : x \mapsto \dfrac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$;
12) $f_{12} : x \mapsto \dfrac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}}$;
13) $f_{13} : s \mapsto \dfrac{1}{(1-s)^2}$;
14) $f_{14} : t \mapsto t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Réponses

Ex. 1.
1) $x \in \mathbf{R}$, $f_1'(x) = 15x^4 - 8x^3 + 14x$;
2) $x \in \mathbf{R}$, $f_2'(x) = 3\mathrm{e}^x + 14x^6$;
3) $x > 0$, $f_3'(x) = \frac{2x-1}{x^2}$;
4) $x > 0$, $f_4'(x) = \frac{x\sqrt{x}-24}{2x^2}$;
5) $x \in \mathbf{R}$, $f_5'(x) = \cos(x) + \sin(x)$;
6) $x > 0$, $f_6'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}$.

Ex. 2.
1) $x \in \mathbf{R}$, $f_1'(x) = 3x(x+4)$;
2) $x \in \mathbf{R}$, $f_2'(x) = (x^3+3x^2-3x-2)\mathrm{e}^x$;
3) $x > 0$, $f_3'(x) = \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$;
4) $x > 0$, $f_4'(x) = \frac{x^2+2x-1+2x(x+1)\ln(x)}{x}$;
5) $x > 0$, $f_5'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$;
6) $x \neq 0$, $f_6'(x) = \frac{12x^3-2x^2+1}{x^2}$;
7) $x > 0$, $f_7'(x) = x^2\left(\frac{7+6\sqrt{x}}{2}\right)$;
8) $x \in \mathbf{R}$, $f_8'(x) = -(2\cos x + (1-2x)\sin x)$;
9) $x \in \mathbf{R}$, $f_9'(x) = 8x^2(x-1)^3(x+1)^3$;
10) $x \in \mathbf{R}$, $f_{10}'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Ex. 3.
1) $x > 0$, $f_1'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$;
2) $x \in \mathbf{R}$, $f_2'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$;
3) $x > 0$, $f_3'(x) = \frac{(1-3x)(1+3x)}{2\sqrt{x}(3x^2+1)^2}$;
4) $x > 0$, $f_4'(x) = \frac{1-x\ln x}{x\mathrm{e}^x}$;
5) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f_5'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$;
6) $x \neq \frac{1}{3}$, $f_6'(x) = \frac{-5}{(3x-1)^2}$;
7) $x > 0$, $f_7'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$;
8) $x > 0$, $f_8'(x) = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$.

Ex. 4.
1) $x \in \mathbf{R}$, $f_1'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
2) $x \in \mathbf{R}$, $f_2'(x) = \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}$;
3) $x \in \mathbf{R}$, $f_3'(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$;
4) $x > 0$, $f_4'(x) = \frac{2}{x(\ln(x^2))^2}$;
5) $x \in \mathbf{R}$, $f_5'(x) = \frac{3}{2}(2x)\sqrt{x^2+1}$;
6) $x \in \mathbf{R}$, $f_6'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)^{-\frac{3}{2}}$;
7) $x \in \mathbf{R}$, $f_7'(x) = -2x\sin(x^2)$;
8) $x \in \mathbf{R}$, $f_8'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Ex. 5.
1) $x \neq 0$, $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\frac{x^2+x+1}{x^2}$;
2) $x \in \mathbf{R}$, $f_2'(x) = \frac{(x+1)\mathrm{e}^{-x}+1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$;
3) $x \in \mathbf{R}$, $f_3'(x) = -2x(x-1)(x+1)\mathrm{e}^{-x^2}$;
4) $x > 0$, $f_4'(x) = \frac{-x(1+x+(2+x)\ln x)}{(1+x)^2}$;
5) $x \in \mathbf{R}$, $f_5'(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{\sin x}$;
6) $x \in \mathbf{R}$, $f_6'(x) = (\cos^2(x) - \sin(x))\mathrm{e}^{\sin x}$;
7) $x \in]0,\pi[$, $f_7'(x) = \frac{1}{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(x)}$;
8) $x > 0$, $f_8'(x) = (1+\ln x)x^x$.

Ex. 6.
1) $x \in \mathbf{R}$, $f_1'(x) = -\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^x-1}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$;
2) $x > -1$, $f_2'(x) = \frac{x^2}{x+1}$;
3) $y \in \mathbf{R}$, $f_3'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$;
4) $h \neq 0$, $f_4'(h) = \frac{-\alpha}{h^2} + \frac{\beta}{2}$;
5) $x > 0$, $f_5'(x) = \frac{1+x+\ln x}{(x+1)^2}$;
6) $x \neq 0$, $f_6'(x)\frac{-\mathrm{e}}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;
7) $y = 0$ ou $x \neq \frac{-1}{y}$, $f_7'(x) = \frac{(1-y)(1+y)}{(1+xy)^2}$;
8) $x > 0$, $f_8'(x)\frac{x^2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}{x^2}$;
9) $x > 0$, $f_9'(x) = \frac{x-n}{x}$;
10) $t \in \mathbf{R}$, $f_{10}'(t) = \frac{-t}{(t^2+1)^{3/2}}$;
11) $x \in \mathbf{R}$, $f_{11}'(x) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$;
12) $x < 1$, $f_{12}'(x) = \frac{\exp(-rx)(1-2r+2rx)}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$;
13) $s \neq 1$, $f_{13}'(s) = \frac{-2}{(1-s)^3}$;
14) $t \in \mathbf{R}$, $f_{14}'(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}(t-1)(t+1)$.