RÉVISIONS

Exercice 1. On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculer w_0 et justifier que w_n est bien défini pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
   (c) En déduire la nature de la suite (w_n) et exprimer w_n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.
5) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer que pour tout n de $\mathbf{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 2. **Partie A.**

1) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   La solution positive, notée ϕ, est appelée « nombre d'or ».
2) Démontrer les égalités :

$$\phi^2 = \phi + 1, \quad 1 + \frac{1}{\phi} = \phi, \quad \sqrt{1+\phi} = \phi, \quad \text{et} \quad \frac{\phi^2+1}{2\phi - 1} = \phi.$$

Partie B. On pose $a_0 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

3) Calculer a_4.
4) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.
5) Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$, $|a_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{4}{9}|a_n - \phi|$.
6) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$:

$$|a_n - \phi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_1 - \phi| \quad \text{puis que} \quad |a_n - \phi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n}.$$

7) Prouver que (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C. On pose $b_0 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 0$:

$$b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 1}{2b_n - 1}.$$

8) Calculer b_1 et b_2.
9) Pour tout $x > \frac{1}{2}$, on pose $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$ et on admet que la fonction ainsi définie est dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$; on note f' sa dérivée.
   (a) Vérifier que $f(\phi) = \phi$ et $f'(\phi) = 0$, puis montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\phi, +\infty[$.
   (b) En déduire (on pourra raisonner par récurrence) que pour tout $n \geqslant 0$:

$$\phi \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 2.$$

   (c) Prouver alors que la suite (b_n) est convergente.
   (d) Monter que pour tout $n \geqslant 0$:

$$b_{n+1} - \phi \leqslant \frac{1}{2}(b_n - \phi)^2.$$

   (e) En déduire (à l'aide d'un raisonnement par récurrence) que pour tout $n \geqslant 0$:

$$0 \leqslant b_n - \phi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^n}.$$

   (f) Quelle est la limite de la suite (b_n) ?

Corrigé ex. 1.

1) On a $u_0 = -1$ puis $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{3}{4}$. Comme $u_0 < 0$ et que u_1 et u_2 sont positifs, la suite u n'est pas géométrique. D'autre part, $u_1 - u_0 = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{4} = u_2 - u_1$ donc la suite u n'est pas arithmétique.
2) (a) $v_0 = 1$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) = \frac{1}{2}v_n.$$
   (c) On déduit des deux questions précédentes que v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$. Donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3) (a) On a $w_0 = -1$ et d'après la question 2)(c), pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n > 0$ donc w_n est bien défini.
   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$; par définition, $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ donc $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$; on calcule
$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{2v_n}{v_n} + \frac{2 \times \frac{1}{2}u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n.$$
   (c) Ainsi w est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = -1$. On en déduit : $w_n = -1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4) D'après la définition de w, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_n = w_n \times v_n = (-1 + 2n) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n-1}{2^n}.$$
5) On procède par récurrence sur n : pour $n = 0$, on a $S_0 = u_0 = -1$. D'autre part, pour $n = 0$, on a $2 - \frac{2n+3}{2^n} = 2 - 3 = -1$. La formule donnant S_n en fonction de n est donc vraie au rang 0.
   Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$. Calculons S_{n+1} :
$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1} &= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ = 2 - \frac{4n+6}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} &= 2 - \frac{(4n+6)-(2n+1)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$
   Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n. Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Corrigé ex. 2.
Partie A.

1) Le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta = 5$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes ($\Delta > 0$) :
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
   Comme $5 > 1$ et que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante, $\sqrt{5} > 1$. Donc $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$. Ainsi, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2) Comme ϕ est solution de l'équation initiale, on a $\phi^2 - \phi - 1 = 0$; ainsi $\phi^2 = \phi + 1$.
   Comme $\phi \neq 0$ on a l'équivalence
$$\phi^2 = \phi + 1 \iff 1 + \frac{1}{\phi} = \phi.$$
   Comme la première égalité est vérifiée, la seconde l'est aussi.
   De même, en passant au carré les nombres positifs, on a
$$\sqrt{1+\phi} = \phi \iff \phi^2 = \phi + 1.$$
   Enfin, comme $\phi \neq \frac{1}{2}$, on a
$$\begin{aligned} \frac{\phi^2+1}{2\phi-1} = \phi &\iff \phi^2 + 1 = (2\phi - 1)\phi \\ &\iff \phi^2 + 1 = 2\phi^2 - \phi \\ &\iff 0 = \phi^2 - \phi - 1. \end{aligned}$$
   Encore une fois, la dernière égalité est vraie donc la première l'est aussi.

Partie B.

3) On trouve $a_4 = \frac{13}{8}$.
4) On a calculé $a_1 = \frac{3}{2}$. On a donc $\frac{3}{2} \leqslant a_1 \leqslant 2$.
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.
   On a donc
$$\begin{aligned} 0 < \frac{3}{2} &\leqslant a_n \leqslant 2 \\ \frac{1}{2} &\leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} &\leqslant 1 + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{2}{3} \leqslant 2 \\ \text{ainsi,} \quad \frac{3}{2} &\leqslant a_{n+1} \leqslant 2 \end{aligned}$$
   Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.
5) On considère la fonction $g\colon \left[\frac{3}{2}, 2\right] \to \mathbf{R}$ définie par $g\colon x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$.
   On a successivement :
$$\begin{aligned} &4 < 5 < 9 \\ &2 < \sqrt{5} < 3 \\ &3 < 1 + \sqrt{5} < 4 \\ &\frac{3}{2} < \phi < 2. \end{aligned}$$
   Donc $\phi \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et d'après la question 2), on a $g(\phi) = \phi$ (il faut vérifier que ϕ appartient bien à l'intervalle de définition de g pour pouvoir calculer $g(\phi)$).
   Or, la fonction g est continue et dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$; on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis.
   On vérifie pour cela que g' est décroissante (fonction associée à la fonction carré, puis composée par l'inverse et enfin multipliée par (-1)) et négative sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
   Ainsi, pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, on a $|g'(x)| \leqslant \left|g'\left(\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{4}{9}$.
   Finalement, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $n \geqslant 1$:
$$|g(a_n) - g(\phi)| \leqslant \frac{4}{9} |a_n - \phi| .$$
   Ce que l'on peut écrire : pour tout $n \geqslant 1$,
$$|a_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{4}{9}|a_n - \phi|.$$
6) Comme pour $n = 1$, on a $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = 1$, on en déduit $|a_n - \phi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_1 - \phi|$ est vrai pour $n = 1$.
   Soit $n \geqslant 1$ tel que $|a_n - \phi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_1 - \phi|$. On a, d'après la question précédente, $|a_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{4}{9}|a_n - \phi|$. Donc
$$|a_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{4}{9}|a_n - \phi| \leqslant \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_1 - \phi| = \left(\frac{4}{9}\right)^{n} |a_1 - \phi|.$$
   Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $|a_n - \phi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_1 - \phi|$.
   Enfin, on a $|a_1 - \phi| = \left|\frac{3}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \left|1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$.
   Or, $26 = 2 \times 9 + 8$ donc $26^2 = (2 \times 9 + 8)^2 = 4 \times 9^2 + 4 \times 8 \times 9 + 8^2 > 5 \times 9^2$. On en déduit
$$\begin{aligned} 26^2 &> 5 \times 9^2 \\ \text{donc } \frac{26^2}{9^2} &> 5 \\ \text{donc } \frac{26}{9} &> \sqrt{5} \\ \text{donc } \frac{13}{9} &> \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{et } \frac{4}{9} &> \frac{\sqrt{5}}{2} - 1. \end{aligned}$$
   Finalement, $|a_1 - \phi| < \frac{4}{9}$, donc $|a_n - \phi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

7) Comme $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$, on a $\lim \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ ainsi la suite $(|a_n - \phi|)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 et la suite (a_n) converge vers ϕ.

Partie C.

8) On trouve $b_1 = \frac{5}{3}$ et $b_2 = \frac{34}{21}$.

9) (a) On a $f(\phi) = \phi$ d'après la première question et on trouve $f'(x) = \frac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$ donc $f'(\phi) = 0$.
Sur l'intervalle considéré, le signe de f' est positif. En effet, son signe est le même que celui du polynôme du second degré au numérateur. Or les deux racines de ce polynôme ont été calculées à la première question et ϕ est la plus grande des deux. Comme le coefficient dominant est positif, le polynôme est du signe de ce coefficient à l'extérieur des racines, il est donc positif sur $[\phi, +\infty[$.
Ainsi, f est croissante sur $[\phi, +\infty[$.

(b) Comme suggéré, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
On a $b_1 = \frac{5}{3}$ et $b_0 = 2$. Comme on a successivement :

$$\begin{aligned} 45 &< 49 \\ \text{donc} \quad 5 &< \frac{49}{9} \\ \text{donc} \quad \sqrt{5} &< \frac{7}{3} \\ \text{donc} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} &< \frac{1+\frac{7}{3}}{2} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\phi \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 2$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\phi \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 2$.
Tous les nombres ci-dessus sont inclus dans l'intervalle de définition de f et f est croissante donc $f(\phi) \leqslant f(b_{n+1}) \leqslant f(b_n) \leqslant f(2) = \frac{5}{3} < 2$. Donc

$$\phi \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 2.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\phi \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 2$.

(c) La suite (b_n) est décroissante et minorée par ϕ d'après la question précédente. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (b_n) est convergente.

(d) Avant de résoudre cette question, expliquons le cheminement.
On peut penser à une récurrence en premier lieu ; le problème est que la fonction f permettant de passer de b_n à b_{n+1} ne peut pas être utilitée dans l'inégalité afin de montrer l'hérédité. Par exemple, elle n'est pas linéaire donc on a : $f(b_{n+1} - \phi) \neq f(b_{n+1}) - f(\phi)$. Et l'autre côté de l'inégalité est aussi compliqué à aborder.
On peut penser à une inégalité des accroissements finis mais le carré à droite du signe $\leqslant$ n'est pas le bienvenu !
On peut aussi « développer » chaque côté (au brouillon, on prolonge le développement du côté gauche en fonction du résultat du côté droit) :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - \phi &= \frac{b_n^2+1}{2b_n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2(b_n^2+1) - (2b_n-1)(1+\sqrt{5})}{2(2b_n-1)} \\ &= \frac{2b_n^2 + 2 - 2b_n + 1 - 2\sqrt{5}b_n + \sqrt{5}}{2(2b_n-1)} \\ &= \frac{2b_n^2 - 2b_n(1+\sqrt{5}) + 3 + \sqrt{5}}{2(2b_n-1)} \\ &= \frac{b_n^2 - b_n(1+\sqrt{5}) + \frac{3+\sqrt{5}}{2}}{2b_n-1} \\ &= \frac{b_n^2 - b_n(1+\sqrt{5}) + 1 + \phi}{2b_n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b_n-\phi)^2 &= \frac{(b_n-\phi)^2}{2} \\ &= \frac{b_n^2 - 2\phi b_n + \phi^2}{2} \\ &= \frac{b_n^2 - 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times b_n + \phi^2}{2} \\ &= \frac{b_n^2 - b_n(1+\sqrt{5}) + 1 + \phi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que la question se réduit à prouver que

$$\frac{1}{2b_n-1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Encore une fois, avant de donner la solution, je préfère vous montrer comment faire : il faut « simplifier » le problème :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2b_n-1} \leqslant \frac{1}{2} &\iff 2 \leqslant 2b_n - 1\\ &\iff \frac{3}{2} \leqslant b_n\end{aligned}$$

Donc on souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geqslant \frac{3}{2}$.
Une première idée serait de raisonner par récurrence (quitte à prouver un encadrement du style « $\forall n \in \mathbf{N}$, $\frac{3}{2} \leqslant b_n \leqslant 2$ »). Mais, sur mon brouillon cela ne fonctionne pas (à vous d'essayer !).
Une autre idée est liée à l'énoncé : on a déjà prouvé que pour tout n, $b_n \geqslant \phi$ (question 9)b)). Il suffirait alors de prouver que $\phi > \frac{3}{2}$ pour avoir le résultat. En effet,

$$\phi > \frac{3}{2} \iff 1+\sqrt{5} > 3 \iff \sqrt{5} > 2 \iff 5 > 4.$$

On rédige la réponse maintenant :
on sait que $5 > 4$ donc $\sqrt{5} > 2$ et par suite $\phi > \frac{3}{2}$.
Comme, d'après la question 9)b), on a pour tout n, $b_n \geqslant \phi$ donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $b_n > \frac{3}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $2b_n - 1 > 2$ et $\frac{1}{2b_n-1} \leqslant \frac{1}{2}$.
Comme, toujours d'après la question 9)b), on a $b_n \geqslant \phi$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $b_{n+1} - \phi > 0$. Comme $b_{n+1} - \phi = \frac{b_n^2 - b_n(1+\sqrt{5})+1+\phi}{2b_n-1}$ et que $2b_n - 1 > 2 > 0$, on en déduit que $b_n^2 - b_n(1+\sqrt{5}) + 1 + \phi > 0$.
On a prouvé que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2b_n-1} \leqslant \frac{1}{2} \\ \text{donc} \qquad & \frac{b_n^2 - b_n(1+\sqrt{5})+1+\phi}{2b_n-1} \leqslant \frac{b_n^2 - b_n(1+\sqrt{5})+1+\phi}{2} \qquad \text{car le num. est positif} \\ \text{ainsi,} \qquad & b_{n+1} - \phi \leqslant \frac{1}{2}(b_n-\phi)^2. \end{aligned}$$

(e) Comme suggéré, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
On a $b_0 = 2$ donc $b_0 - \phi = 2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Or $2 < \sqrt{5} < 3$ donc on en déduit que $0 < b_0 - \phi < \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}$. La propriété est donc vraie au rang 0.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leqslant b_n - \phi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^n}$.
On a $0 < b_{n+1} - \phi \leqslant \frac{1}{2}(b_n-\phi)^2$ d'après la question 9)b) et la question précédente donc

$$0 < b_{n+1} - \phi \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^n}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2+2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^{n+1}}.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant b_n - \phi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^n}.$$

(f) Comme $\lim_{n\to+\infty} 1+2+2^2+\cdots+2^n = +\infty$ donc, comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^n} = 0$.
Par comparaison, $\lim b_n = \phi$.