

PRIMITIVES

I Primitives usuelles

Fonction f	Primitive F	Domaine de validité	Condition
$x \mapsto m$	$x \mapsto mx + p$	\mathbf{R}	$m \in \mathbf{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbf{R} si $n \geq 0$ $]0; +\infty[$ ou $] - \infty; 0[$ sinon	$n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$]0; +\infty[$	
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	\mathbf{R}	
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	\mathbf{R}	
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	\mathbf{R}	
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan x$	\mathbf{R}	
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$]0; +\infty[$	$\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
$x \mapsto u'(x)u^n(x)$	$x \mapsto \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$	I	u dérivable sur I et $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$
$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln(u(x))$	I	$u > 0$ et dérivable sur I
$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$	I	$u > 0$ et dérivable sur I
$x \mapsto u'(x) \cos(u(x))$	$x \mapsto \sin(u(x))$	I	u dérivable sur I
$x \mapsto u'(x) \sin(u(x))$	$x \mapsto -\cos(u(x))$	I	u dérivable sur I
$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)}$	I	u dérivable sur I
$x \mapsto u'(mx+p)$	$x \mapsto \frac{1}{m}u(mx+p)$	$\{x \in \mathbf{R} \mid mx+p \in I\}$	u dérivable sur I

II Exercices

Exercice 1. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité¹

- 1) $f_1: x \mapsto 2x^5 - 3x^2$; 3) $f_3: x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$; 5) $f_5: x \mapsto 6x^2 - 4x + 3$;
 2) $f_2: x \mapsto 5x^4 + 2x^3$; 4) $f_4: x \mapsto \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$; 6) $f_6: x \mapsto 4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$.

Exercice 2. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

- 1) $f_1: x \mapsto 3 \cos x - 4 \sin x$; 4) $f_4: x \mapsto 3e^x - \sin x$; 7) $f_7: x \mapsto 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$;
 2) $f_2: x \mapsto 5 \sin x + 2 \cos x$; 5) $f_5: x \mapsto 5 - e^{-x} + 3 \cos x$;
 3) $f_3: x \mapsto e^x - 2 \cos x$; 6) $f_6: x \mapsto 1 + 3e^x - 4 \cos x$; 8) $f_8: x \mapsto \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^x$.

Exercice 3. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

- 1) $f_1: x \mapsto (x+1)^4$; 4) $f_4: x \mapsto \frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
 2) $f_2: x \mapsto (x-2)^3$; 5) $f_5: x \mapsto \frac{1}{x-1} + 4 \cos(x+2)$;
 3) $f_3: x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 6) $f_6: x \mapsto \frac{3}{x-3} - 2 \sin(x-1)$.

Exercice 4. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

- 1) $f_1: x \mapsto e^{2x} - \cos(3x)$; 5) $f_5: x \mapsto \sqrt{\frac{x}{5}} + 4 \sin(4x+2)$;
 2) $f_2: x \mapsto e^{\frac{x}{4}} + \sin(2x)$;
 3) $f_3: x \mapsto 2 \sin \frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$; 6) $f_6: x \mapsto \frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$;
 4) $f_4: x \mapsto 3 \cos \frac{x}{7} + 2e^{3x+\frac{1}{2}}$;

Exercice 5. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

- 1) $f_1: x \mapsto \frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$; 3) $f_3: x \mapsto (1+2x)(x-3)$;
 2) $f_2: x \mapsto \frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$; 4) $f_4: x \mapsto (2x-3)(2+3x)$.

1. la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur \mathbf{R}_+^* par $x \mapsto x^{1/3}$.

Exercice 6. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous ; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

- 1) $f_1 : x \mapsto (2x + 1)\sqrt{x}$; 3) $f_3 : x \mapsto \frac{x + 4}{\sqrt[3]{x}}$;
 2) $f_2 : x \mapsto (3x - 2)\sqrt[3]{x}$; 4) $f_4 : x \mapsto \frac{x - 3}{\sqrt{x}}$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 x \, dx$; 9) $\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$; 17) $\int_{-1}^2 (1 - 3x^2) \, dx$;
 2) $\int_0^3 x^2 \, dx$; 10) $\int_0^{\ln 2} e^x \, dx$; 18) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) \, dx$;
 3) $\int_{-1}^2 3x^2 \, dx$; 11) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$; 19) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) \, dx$;
 4) $\int_{-2}^3 2x \, dx$; 12) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x \, dx$; 20) $\int_0^4 (x - 3\sqrt{x}) \, dx$;
 5) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx$; 13) $\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx$; 21) $\int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) \, dx$;
 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} \, dx$; 14) $\int_{-3\pi}^0 \cos 3x \, dx$; 22) $\int_0^2 e^{3x} \, dx$;
 7) $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$; 15) $\int_{-3}^2 (2x - 3) \, dx$; 23) $\int_1^3 2e^{2x} \, dx$;
 8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$; 16) $\int_2^{-1} (5 - 4x) \, dx$;

Exercice 8.

- 1) $\int_{-2}^1 x(x + 3)(2x - 1) \, dx$; 6) $\int_1^3 \frac{3x - 1}{\sqrt{x}} \, dx$; 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$;
 2) $\int_1^0 (x + 1)(x^2 - 2) \, dx$; 7) $\int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x + 2}} \, dx$; 13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$;
 3) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \, dx$; 8) $\int_1^2 \frac{3}{2x - 1} \, dx$; 14) $\int_0^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x) \, dx$;
 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \, dx$; 9) $\int_0^1 \frac{4}{3x + 2} \, dx$; 15) $\int_0^3 x^2 \sqrt{x + 1} \, dx$;
 5) $\int_1^2 \frac{5x - 2}{\sqrt[3]{x}} \, dx$; 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \, dx$; 16) $\int_3^4 \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \, dx$;
 11) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$;

Exercice 9. Trouver tous les réels b pour lesquels l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_1^b (b - 4x) \, dx \geq 6 - 5b.$$

Corrigé ex. 1.

- 1) $F_1: x \mapsto \frac{x^6}{3} - x^3$ sur \mathbf{R} ;
 2) $F_2: x \mapsto x^5 + \frac{x^4}{2}$ sur \mathbf{R} ;
 3) $F_3: x \mapsto 2 \ln x - \frac{3}{x}$ sur \mathbf{R}_+^* ;
 4) $F_4: x \mapsto -\frac{1}{x^2} - 3 \ln x$ sur \mathbf{R}_+^* ;
 5) $F_5: x \mapsto 2x^3 - 2x^2 + 3x$ sur \mathbf{R} ;
 6) $F_6: x \mapsto 3x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x}$ sur \mathbf{R}_+ .

Corrigé ex. 2.

- 1) $F_1: x \mapsto 3 \sin x + 4 \cos x$ sur \mathbf{R} ;
 2) $F_2: x \mapsto -5 \cos x + 2 \sin x$ sur \mathbf{R} ;
 3) $F_3: x \mapsto e^x - 2 \sin x$ sur \mathbf{R} ;
 4) $F_4: x \mapsto 3e^x + \cos x$ sur \mathbf{R} ;
 5) $F_5: x \mapsto 5x + e^{-x} + 3 \sin x$ sur \mathbf{R} ;
 6) $F_6: x \mapsto x + 3e^x - 4 \sin x$ sur \mathbf{R} ;
 7) $F_7: x \mapsto 6x^{4/3} - 2 \ln x + 3e^x$ sur \mathbf{R} ;
 8) $F_8: x \mapsto 8\sqrt{x} + 3 \ln x - 2e^x$ sur \mathbf{R} .

Corrigé ex. 3.

- 1) $F_1: x \mapsto \frac{1}{5}(x+1)^5$ sur \mathbf{R} ;
 2) $F_2: x \mapsto \frac{1}{4}(x-2)^4$ sur \mathbf{R} ;
 3) $F_3: x \mapsto \frac{4}{3}(x-2)^{3/2}$ sur $]2, +\infty[$;
 4) $f_4: x \mapsto 3(x+3)^{-1/3}$ sur $] -3, +\infty[$
 $F_4: x \mapsto \frac{9}{2}(x+3)^{2/3}$;
 5) $F_5: x \mapsto \ln(x-1) + 4 \sin(x+2)$ sur $]1, +\infty[$;
 6) $F_6: x \mapsto 3 \ln(x-3) + 2 \cos(x-1)$ sur $]3, +\infty[$.

Corrigé ex. 4.

- 1) $F_1: x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3} \sin(3x)$ sur \mathbf{R} ;
 2) $F_2: x \mapsto 4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ sur \mathbf{R} ;
 3) $F_3: x \mapsto -10 \cos\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$ sur \mathbf{R} ;
 4) $F_4: x \mapsto 21 \sin\left(\frac{x}{7}\right) + \frac{2}{3}e^{3x+\frac{1}{2}}$ sur \mathbf{R} ;
 5) $F_5: x \mapsto 5\left(\frac{x}{5}\right)^{3/2} - \cos(4x+2)$ sur \mathbf{R}_+ ;
 6) $F_6: x \mapsto \frac{8}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2} \ln(2x-5)$ sur $\left] \frac{5}{2}, +\infty \right[$.

Corrigé ex. 5.

- 1) $F_1: x \mapsto \frac{2}{15}x^5 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^2}{6}$ sur \mathbf{R} ;
 2) $F_2: x \mapsto \frac{3}{10}x^4 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{2x}{5}$ sur \mathbf{R} ;
 3) On a $f_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$ donc $F_3: x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x$ sur \mathbf{R} ;
 4) $F_4: x \mapsto 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x$ sur \mathbf{R} .

Corrigé ex. 6.

- 1) $f_1: x \mapsto 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x^{3/2} + x^{1/2}$ donc, sur $]0, +\infty[$, on a $F_1: x \mapsto 2 \times \frac{2}{5} \times x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}$ on peut écrire
 $F_1(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} = 2x\sqrt{x}\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{3}\right)$;
 2) $F_2: x \mapsto \frac{9}{7}x^{7/3} - \frac{3}{2}x^{4/3}$ sur $]0, +\infty[$;
 3) $F_3: x \mapsto \frac{3}{5}x^{5/3} + 6x^{2/3}$;
 4) $F_4: x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2} - 6\sqrt{x}$.

Corrigé ex. 7.

- | | | |
|---------------------|-----------|------------------------------|
| 1) $\frac{1}{2}$; | 8) 2 ; | 17) -6 ; |
| 2) 9 ; | 9) 1 ; | 18) $\frac{8}{3}$; |
| 3) 0 ; | 10) 1 ; | 19) 10 ; |
| 4) 5 ; | 11) 0 ; | 20) -8 |
| 5) $\frac{2}{3}$; | 12) 2 ; | 21) 68 ; |
| 6) $\frac{3}{8}$; | 13) 1 ; | 22) $\frac{1}{3}(e^6 - 1)$; |
| 7) $\frac{14}{3}$; | 14) 0 ; | 23) $e^6 - e^2$. |
| | 15) -20 ; | |
| | 16) -9 ; | |

Corrigé ex. 8.

- | | | |
|-------------------------|--|-----------------------------|
| 1) 12 ; | 7) 8 ; | 12) $\frac{1}{2}$; |
| 2) $\frac{29}{12}$; | 8) $\frac{3}{2} \ln 3$; | 13) $\frac{1}{2}$; |
| 3) $\frac{29}{6}$; | 9) $\frac{4}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$; | 14) $\frac{3\pi}{4}$; |
| 4) 5 ; | 10) $\frac{1}{2}$; | 15) $\frac{1696}{105}$; |
| 5) $3 \times 2^{2/3}$; | 11) π ; | 16) $\frac{3}{2} + \ln 2$. |
| 6) $4\sqrt{3}$; | | |

Corrigé ex. 9. On calcule dans un premier temps l'intégrale de gauche. La fonction $x \mapsto b - 4x$ est une fonction affine donc elle est continue et une primitive est la fonction $x \mapsto bx - 2x^2$. On a ainsi :

$$\int_1^b (b - 4x) dx = [bx - 2x^2]_1^b = b^2 - 2b^2 - (b - 2) = -b^2 - b + 2.$$

Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_1^b (b - 4x) dx \geq 6 - 5b &\iff -b^2 - b + 2 \geq 6 - 5b \\ &\iff 0 \geq b^2 - 4b + 4 \\ &\iff 0 \geq (b - 2)^2 \end{aligned}$$

Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, seule la valeur $b = 2$ satisfait la dernière inégalité (et donc la première).