Primitives

I Primitives usuelles

Fonction f	Primitive F	Domaine de validité	Condition
$x \mapsto m$	$x \mapsto mx + p$	$\mathbf{R}$	$m \in \mathbf{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbf{R}$ si $n \geqslant 0$ $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$ sinon	$n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$]0;+\infty[$	
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbf{R}$	
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbf{R}$	
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbf{R}$	
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan x$	$\mathbf{R}$	
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$	$\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
$x \mapsto u'(x)u^n(x)$	$x \mapsto \dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1}$	I	u dérivable sur I et $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln(u(x))$	I	$u > 0$ et dérivable sur I
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$	I	$u > 0$ et dérivable sur I
$x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$	$x \mapsto \sin(u(x))$	I	u dérivable sur I
$x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$	$x \mapsto -\cos(u(x))$	I	u dérivable sur I
$x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$	I	u dérivable sur I
$x \mapsto u'(mx+p)$	$x \mapsto \dfrac{1}{m}u(mx+p)$	$\{x \in \mathbf{R} \mid mx+p \in I\}$	u dérivable sur I

II Exercices

Exercice 1. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous ; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité [1]

1) $f_1 : x \mapsto 2x^5 - 3x^2$;
2) $f_2 : x \mapsto 5x^4 + 2x^3$;
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}$;
4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x}$;
5) $f_5 : x \mapsto 6x^2 - 4x + 3$;
6) $f_6 : x \mapsto 4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$.

Exercice 2. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous ; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

1) $f_1 : x \mapsto 3\cos x - 4\sin x$;
2) $f_2 : x \mapsto 5\sin x + 2\cos x$;
3) $f_3 : x \mapsto e^x - 2\cos x$;
4) $f_4 : x \mapsto 3\mathrm{e}^x - \sin x$;
5) $f_5 : x \mapsto 5 - \mathrm{e}^{-x} + 3\cos x$;
6) $f_6 : x \mapsto 1 + 3\mathrm{e}^x - 4\cos x$;
7) $f_7 : x \mapsto 6\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{x} + 3\mathrm{e}^x$;
8) $f_8 : x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x} - 2\mathrm{e}^x$.

Exercice 3. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous ; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

1) $f_1 : x \mapsto (x+1)^4$;
2) $f_2 : x \mapsto (x-2)^3$;
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$;
4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
5) $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + 4\cos(x+2)$;
6) $f_6 : x \mapsto \dfrac{3}{x-3} - 2\sin(x-1)$.

Exercice 4. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous ; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

1) $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - \cos(3x)$;
2) $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{4}} + \sin(2x)$;
3) $f_3 : x \mapsto 2\sin\dfrac{x}{5} - 5\mathrm{e}^{2x+\frac{1}{3}}$;
4) $f_4 : x \mapsto 3\cos\dfrac{x}{7} + 2\mathrm{e}^{3x+\frac{1}{2}}$;
5) $f_5 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$;
6) $f_6 : x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{3x+1}} - \dfrac{3}{2x-5}$.

Exercice 5. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous ; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$;
2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{6x^3 - 3x + 2}{5}$;
3) $f_3 : x \mapsto (1+2x)(x-3)$;
4) $f_4 : x \mapsto (2x-3)(2+3x)$.

1. la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto x^{1/3}$.

Exercice 6. Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous ; après avoir donné rapidement leur ensemble de définition/continuité.

1) $f_1 : x \mapsto (2x+1)\sqrt{x}$;

2) $f_2 : x \mapsto (3x-2)\sqrt[3]{x}$;

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$;

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{x-3}{\sqrt{x}}$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 x \,\mathrm{d}x$;

2) $\displaystyle\int_0^3 x^2 \,\mathrm{d}x$;

3) $\displaystyle\int_{-1}^2 3x^2 \,\mathrm{d}x$;

4) $\displaystyle\int_{-2}^3 2x \,\mathrm{d}x$;

5) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$;

6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3} \,\mathrm{d}x$;

7) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$;

8) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$;

9) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$;

10) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$;

11) $\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x \,\mathrm{d}x$;

12) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$;

13) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \,\mathrm{d}x$;

14) $\displaystyle\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x \,\mathrm{d}x$;

15) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (2x-3) \,\mathrm{d}x$;

16) $\displaystyle\int_{2}^{-1} (5-4x) \,\mathrm{d}x$;

17) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(1-3x^2\right) \,\mathrm{d}x$;

18) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2+1\right) \,\mathrm{d}x$;

19) $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(3x^2-4x+5\right) \,\mathrm{d}x$;

20) $\displaystyle\int_{0}^{4} (x-3\sqrt{x}) \,\mathrm{d}x$;

21) $\displaystyle\int_{1}^{9} \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right) \,\mathrm{d}x$;

22) $\displaystyle\int_{0}^{2} \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x$;

23) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 8.

1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} x(x+3)(2x-1) \,\mathrm{d}x$;

2) $\displaystyle\int_{1}^{0} (x+1)\left(x^2-2\right) \,\mathrm{d}x$;

3) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \,\mathrm{d}x$;

4) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right) \,\mathrm{d}x$;

5) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x$;

6) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{3x-1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$;

7) $\displaystyle\int_{2}^{7} \frac{4}{\sqrt{x+2}} \,\mathrm{d}x$;

8) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3}{2x-1} \,\mathrm{d}x$;

9) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{4}{3x+2} \,\mathrm{d}x$;

10) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \,\mathrm{d}x$;

11) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$;

12) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$;

13) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \,\mathrm{d}x$;

14) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) \,\mathrm{d}x$;

15) $\displaystyle\int_{0}^{3} x^2\sqrt{x+1} \,\mathrm{d}x$;

16) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{x^2-4x+5}{x-2} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 9. Trouver tous les réels b pour lesquels l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_1^b (b-4x)\,\mathrm{d}x \geqslant 6-5b.$$

Corrigé ex. 1.

1) $F_1 : x \mapsto \dfrac{x^6}{3} - x^3$ sur $\mathbf{R}$;
2) $F_2 : x \mapsto x^5 + \dfrac{x^4}{2}$ sur $\mathbf{R}$;
3) $F_3 : x \mapsto 2\ln x - \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbf{R}_+^*$;
4) $F_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} - 3\ln x$ sur $\mathbf{R}_+^*$;
5) $F_5 : x \mapsto 2x^3 - 2x^2 + 3x$ sur $\mathbf{R}$;
6) $F_6 : x \mapsto 3x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x}$ sur $\mathbf{R}_+$.

Corrigé ex. 2.

1) $F_1 : x \mapsto 3\sin x + 4\cos x$ sur $\mathbf{R}$;
2) $F_2 : x \mapsto -5\cos x + 2\sin x$ sur $\mathbf{R}$;
3) $F_3 : x \mapsto e^x - 2\sin x$ sur $\mathbf{R}$;
4) $F_4 : x \mapsto 3\mathrm{e}^x + \cos x$ sur $\mathbf{R}$;
5) $F_5 : x \mapsto 5x + \mathrm{e}^{-x} + 3\sin x$ sur $\mathbf{R}$;
6) $F_6 : x \mapsto x + 3\mathrm{e}^x - 4\sin x$ sur $\mathbf{R}$;
7) $F_7 : x \mapsto \dfrac{9}{2}x^{4/3} - 2\ln x + 3\mathrm{e}^x$ sur $\mathbf{R}$;
8) $F_8 : x \mapsto 8\sqrt{x} + 3\ln x - 2\mathrm{e}^x$ sur $\mathbf{R}$.

Corrigé ex. 3.

1) $F_1 : x \mapsto \dfrac{1}{5}(x+1)^5$ sur $\mathbf{R}$;
2) $F_2 : x \mapsto \dfrac{1}{4}(x-2)^4$ sur $\mathbf{R}$;
3) $F_3 : x \mapsto 4\sqrt{x-2}$ sur $]2,+\infty[$;
4) $f_4 : x \mapsto 3(x+3)^{-1/3}$ sur $]-3,+\infty[$
$F_4 : x \mapsto \dfrac{9}{2}(x+3)^{2/3}$;
5) $F_5 : x \mapsto \ln(x-1) + 4\sin(x+2)$ sur $]1,+\infty[$;
6) $F_6 : x \mapsto 3\ln(x-3) + 2\cos(x-1)$ sur $]3,+\infty[$.

Corrigé ex. 4.

1) $F_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{3}\sin(3x)$ sur $\mathbf{R}$;
2) $F_2 : x \mapsto 4\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$ sur $\mathbf{R}$;
3) $F_3 : x \mapsto -10\cos\left(\dfrac{x}{5}\right) - \dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{2x+\frac{1}{3}}$ sur $\mathbf{R}$;
4) $F_4 : x \mapsto 21\sin\left(\dfrac{x}{7}\right) + \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{3x+\frac{1}{2}}$ sur $\mathbf{R}$;
5) $F_5 : x \mapsto \dfrac{10}{3}\left(\dfrac{x}{5}\right)^{3/2} - \cos(4x+2)$ sur $\mathbf{R}_+$;
6) $F_6 : x \mapsto \dfrac{8}{3}\sqrt{3x+1} - \dfrac{3}{2}\ln(2x-5)$ sur $\left]\dfrac{5}{2},+\infty\right[$.

Corrigé ex. 5.

1) $F_1 : x \mapsto \dfrac{2}{15}x^5 - \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x^2}{6}$ sur $\mathbf{R}$;
2) $F_2 : x \mapsto \dfrac{3}{10}x^4 - \dfrac{3}{10}x^2 + \dfrac{2x}{5}$ sur $\mathbf{R}$;
3) On a $f_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$ donc $F_3 : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 3x$ sur $\mathbf{R}$;
4) $F_4 : x \mapsto 2x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 6x$ sur $\mathbf{R}$.

Corrigé ex. 6.

1) $f_1 : x \mapsto 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x^{3/2} + x^{1/2}$ donc, sur $]0,+\infty[$, on a $F_1 : x \mapsto 2 \times \dfrac{2}{5} \times x^{5/2} + \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ on peut écrire
$F_1(x) = \dfrac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} = 2x\sqrt{x}\left(\dfrac{2x}{5} + \dfrac{1}{3}\right)$;
2) $F_2 : x \mapsto \dfrac{9}{7}x^{7/3} - \dfrac{3}{2}x^{4/3}$ sur $]0,+\infty[$;
3) $F_3 : x \mapsto \dfrac{3}{5}x^{5/3} + 6x^{2/3}$;
4) $F_4 : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{3/2} - 6\sqrt{x}$.

Corrigé ex. 7.

1) $\dfrac{1}{2}$;
2) 9 ;
3) 9 ;
4) 5 ;
5) $\dfrac{2}{3}$;
6) $\dfrac{3}{8}$;
7) $\dfrac{14}{3}$;
8) 2 ;
9) 1 ;
10) 1 ;
11) 0 ;
12) 2 ;
13) 1 ;
14) 0 ;
15) -20 ;
16) -9 ;
17) -6 ;
18) $\dfrac{8}{3}$;
19) 10 ;
20) -8
21) 68 ;
22) $\dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^6 - 1\right)$;
23) $\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^2$.

Corrigé ex. 8.

1) 12 ;
2) $\dfrac{29}{12}$;
3) $\dfrac{29}{6}$;
4) 5 ;
5) $3 \times 2^{2/3}$;
6) $4\sqrt{3}$;
7) 8 ;
8) $\dfrac{3}{2}\ln 3$;
9) $\dfrac{4}{3}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$;
10) $\dfrac{1}{2}$;
11) π ;
12) $\dfrac{1}{2}$;
13) $\dfrac{1}{2}$;
14) $\dfrac{3\pi}{4}$;
15) $\dfrac{1\,696}{105}$;
16) $\dfrac{3}{2} + \ln 2$.

Corrigé ex. 9. On calcule dans un premier temps l'intégrale de gauche. La fonction $x \mapsto b - 4x$ est une fonction affine donc elle est continue et une primitive est la fonction $x \mapsto bx - 2x^2$. On a ainsi :

$$\int_1^b (b-4x)\,\mathrm{d}x = \left[bx - 2x^2\right]_1^b = b^2 - 2b^2 - (b-2) = -b^2 - b + 2.$$

Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_1^b (b-4x)\,\mathrm{d}x \geqslant 6 - 5b &\iff -b^2 - b + 2 \geqslant 6 - 5b \\
&\iff 0 \geqslant b^2 - 4b + 4 \\
&\iff 0 \geqslant (b-2)^2
\end{aligned}$$

Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, seule la valeur $b = 2$ satisfait la dernière inégalité (et donc la première).